REVISED AND ENLARGED EDITION

गणित शिक्षण

TEACHING OF MATHEMATICS

एम. एस रावत

एम. बी. लाल अग्रवाल

विषय-सूची

1

गणित शिक्षण का संक्षिप्त इतिहास
[A BRIEF HISTORY OF MATHEMATICS TEACHING]

गणित का इतिहास (History of Mathematics)

गणित को भारत में प्रारम्भ से ही बहुत महत्त्वपूर्ण विषय माना जाता रहा है। वेदांग ज्योतिष (1000 ई. पू.) में गणित की महत्ता पर प्रकाश डालते हुए लिखा गया है–

यथा शिखा मयूराणां, नागानां मणयो यथा।
तद्वदवेदांरा-शास्त्राणां, गणितं मूर्धिनं वर्तते।।

अर्थात् जिस प्रकार मयूरों की शिखाएँ और सर्पों की मणियाँ शरीर में सर्वोपरि मूर्धा (मस्तक) पर विराजमान हैं, उसी प्रकार वेदों के सब अंगों तथा शास्त्रों में गणित शिरोमणि है।

प्रसिद्ध जैन गणितज्ञ महावीराचार्य ने गणित के सन्दर्भ में तो यहाँ तक कहा है–

बहुभिर्विप्रलापैः किम त्रैलोक्ये सचराचरे।
यत्किंचिद्वस्तु तत्सर्व गणितेन बिना न हि।।

अर्थात् बहुत अधिक प्रलाप करने से क्या लाभ है। इस सचराचर जगत में जो कुछ भी वस्तु है, वह सब गणित (आधार) के बिना समझना सम्भव नहीं है।

यह तथ्य भारतीय मनीषियों, दार्शनिकों और तत्त्ववेत्ताओं को भली-भाँति ज्ञात था, इसी कारण उन्होंने प्रारम्भ से ही गणित के विकास पर विशेष ध्यान दिया। जब अरब एवं यूरोपीय देशों में गणित का ज्ञान नगण्य था। भारत इस क्षेत्र में महान उपलब्धियाँ अर्जित कर चुका था।

अरब और अन्य देशों से लोग व्यापार के लिए भारत आते थे और वे व्यापार करने के साथ-साथ यहाँ की सरल गणना पद्धतियों को भी सीख गये। उन्हीं के द्वारा यह ज्ञान अरब देशों से होता हुआ यूरोप तक पहुँचा। समय-समय पर विदेशी ज्ञान जिज्ञासु भी आये तथा उन्होंने यहाँ के अद्वितीय गणितीय ज्ञान को प्राप्त कर अपने देश तक पहुँचाया। यह कहना अतिशयोक्तिपूर्ण न होगा कि बारहवीं शताब्दी तक भारत गणित के क्षेत्र में विश्व का गुरु था।

गणित सम्पूर्ण ज्ञान शास्त्रों में व्याप्त सत्ता है। यह आदर्श व्यवस्थापन (Ideal Systematization) की सर्वोत्तम एक मात्र ज्ञान राशि है, जो कि मानव संस्कृति (Human Culture) का प्राण है। आदिम, जातियों की भाषाओं के अध्ययन एवं सम्बन्धित विलुप्त भाषाओं (Extinct Languages) के अनुसन्धान गणित के विकास प्रक्रम की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि उपलब्ध कराते हैं। इनसे पता चलता है कि गणन जैसी आभासी (Apparent) सरलतम प्रक्रियाओं (Simplex Process) को भी वर्तमान व्यवस्थापन स्तर पर कई चरणों (Stages) से होकर गुजरना पड़ा। सभी गणितीय प्रक्रमों के लिए व्यवस्थापन आवश्यक (Essential) गुण है। प्रारम्भिक लेखों से भी यही प्रेक्षण प्राप्त हुए हैं। मूर्त वस्तुओं के समुच्चयों (Sets) को प्रतीकों (Symbols) से लेकर सामान्य संकेतों (Noladon) तक संख्याओं (Numerals) के रूप में प्रस्तुत करने की प्रक्रिया मानसिक रूप से अति कष्टप्रद रही है। आभासी (Apparent) सरलतम गणितीय संख्यांक पद्धति (Numeral System) अस्तित्व में आयी। गणित की उत्पत्ति अतिविकसित (Developed) शहरी सभ्यताओं (Urban Civilizations) और सुसंगठित आर्थिक संस्थितियों (Well organized economic conditions) के ढाँचे (Frame work) में हुई। महान पाश्चात्य प्राचीन संस्कृतियों बेबीलोन (Babylon), मिस्त्र (Egypt), ग्रीस (Greece), रोम (Rome) में से मिस्त्र और रोम में गणित का विकास क्रम प्रारम्भिक अवस्था तक ही रहा। पाश्चात्य और भारतीय गणित के विकास क्रमों का इतिहास अलग-अलग है। यहाँ पाश्चात्य और भारतीय गणित के विकास को ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य में अलग-अलग प्रस्तुत किया जा रहा है।

पाश्चात्य गणित का विकास काल खण्ड (Development Periods of Western Mathematics)—संस्कृतियाँ मानव विवेक की उत्पाद हैं। संगीत, कला, विज्ञान दर्शन, धर्म, जीवन पद्धति के नियम आदि इसकी विविधताएँ हैं। स्पष्ट है गणित का उद्गम इस उद्भव का समकालिक है। काल क्रम में इसके लिए निश्चित बिन्दु का निर्धारण करना सम्भव नहीं है। ऐतिहासिक अवशेषों एवं स्मृति चिन्हों के विश्लेषण से इस सम्बन्ध में कुछ अनुमान ही लगाये जा सके हैं। इस प्रक्रिया में विभिन्न विद्वानों ने जो निष्कर्ष निकाले, उनके अनुसार गणित के विकास को निम्नलिखित काल खण्डों में प्रस्तुत किया जा सकता है–

1. प्राचीन युग (Ancient age)
2. मध्य युग (Middle age)
3. आधुनिक काल (Modern period)
   (i) सत्रहवीं शताब्दी (17th Century)
   (ii) अट्ठारहवीं शताब्दी (18th Century)
   (iii) उन्नीसवीं और बीसवीं शताब्दियाँ (19th and 20th Centuries)

प्राचीन युग (Ancient Age)—इस युग में गणित के विकास का श्रेय प्रमुख रूप से मेसोपोटामिया (Mesopotamia), मिस्त्र (Egypt) और यूनानी सभ्यताओं को है। प्राचीन और आधुनिक युगों में मध्यकाल की अपेक्षा गणित का अपेक्षाकृत अधिक विकास और विस्तार हुआ।

प्राचीन भारत में गणित पढ़ाने का उद्देश्य वस्तुओं के मूल्य निकलवाने में और हिसाब रखने में अधिक था। उस समय कार्य-प्रणाली की अपेक्षा फल पर अधिक जोर दिया जाता था।

भारतीय गणित का विकास-काल खण्ड (Periods of Development of Indian Mathematics)

ऊँ पूर्णमदः पूर्णमिदं पूर्णात् पूर्णमुदच्यते।
पूर्णस्य पूर्ण मादाय पूर्ण मेवावशिष्यते।।

यह मन्त्र 'पूर्ण' के युग-धर्म की बीजक है। परब्रह्म सच्चिदानन्द सब प्रकार से पूर्ण हैं। यह जगत भी पूर्ण है, क्योंकि उस पूर्ण से ही यह पूर्ण उत्पन्न हुआ है। पूर्ण के निकाल लेने पर पूर्ण ही शेष रहता है। शून्य का आकार गोला है।

$$0 + 0 = 0, 0 - 0 = 0$$

विभिन्न वस्तुओं को एक नाम देना ही गणित है। प्रत्येक विषय अपनी विकास प्रक्रिया में आगे अपनी प्रगति के लिए गणित सम्बन्धी निष्कर्षों, विधियों और तकनीकों का ही सहारा लेता है। विशिष्ट वस्तुओं और घटनाओं द्वारा प्रदर्शित व्यवस्था के सार का सामान्य अध्ययन ही गणित है। ऐतिहासिक परिप्रेक्ष्य में हम पाते हैं कि गणित और ज्योतिष यमज (Twins) के रूप में भारत की संस्कृति के अभिन्न अंग रहे हैं।

मानव ने अपने निर्बन्ध गृहविहीन जीवन में अपनी संज्ञा से जब ऋतु संक्रमण जैसे आवृत्यात्मक (Frequent) प्राकृतिक परिवर्तनों को जाना, जब उसने इनके प्रभावों से उत्पन्न अनेक प्रकार के फूलों, फलों, अन्नों आदि को भोगा, तब से उसको प्रकृति में कालिक (Periodic) आवृत्ति का आभास हुआ। इस प्रकार उसने पंचांग का भेद पा लिया। मानव ने पंचांग से काल को जीता और आकाशीय पिण्डों की गति और नियति जानी। चक्र के आविष्कार से मानव सभ्यता के विकास की गति को त्वरण मिला और मनुष्य धरा पर चक्रवर्ती बनने की दिशा में आगे बढ़ा। उसने गिना और गुणा, जोड़ा और घटाया, शून्य और अनुपात जाना, संख्या से दशमलव तक क्षेत्रफल त्रिकोणमिति से गुरुत्वाकर्षण सापेक्षता तक के सिद्धान्त खोजे।

मूल रूप से वेद का अभिप्राय असीमित ज्ञान का भण्डार और निर्झर शीषोद्गम (Fountainhead) है। मनुष्य मात्र के लिए आवश्यक सभी प्रकार का ज्ञान इसमें मौजूद है। वेद शिक्षण और प्रशिक्षण के उत्पाद नहीं हैं। ये श्रुत हैं। ये सत्य-दृष्टाओं की वाणी से मधुर गीतों के रूप में स्वयंमेव प्रस्फुटित हुए हैं। सभी वेद-मन्त्र और सूक्त त्रि-आयामी अर्थ वाले हैं। एक मन्त्र की दो पंक्तियाँ जहाँ एक ओर कृष्ण की स्तुति करती हैं वहीं इससे शिव स्तुति भी होती है। गणित में यह मन्त्र 'पाई' वृत्त की परिधि और त्रिज्या का अनुपात के दसवें भाग को दशमलव के 32 अंकों तक प्रस्तुत करता है। वैदिक सूत्रों (Formulae) और समीकरणों (Equations) के द्वारा जटिलतम और लम्बी गणितीय प्रक्रियाओं को एक-दो शब्दों में ही प्रस्तुत किया गया है।

स्वामी भारती कृष्णतीर्थ ने ऋग्वेद के परिशिष्टों में उपलब्ध गणित के 16 सूत्रों की विवेचना उदाहरण सहित अपनी कृति 'वैदिक मैथेमैटिक्स' में दी है। ये सूत्र इस प्रकार हैं—एकाधिकेन पूर्वण, निखिलं नव तश्चरमं दशतः, ऊर्ध्वतिग्भ्याम्, परावर्त्य योजयेत, शून्यं साम्य समुच्चेय, (आनुरूप्ये) शून्यमन्यत्, संकलन व्यवकलनाभ्याम्

पूरणपूणाभ्याम्, चलन कलनाभ्याम्, यावदनम्, व्यष्टि, समष्टि, शेषाण्यङ्केन चरमेण, सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्, एक न्यूनेन पूर्वण, गुणित समुच्चयः गुणक समुच्चय।

आधुनिक पाश्चात्य गणित की प्रगति और विकास के लिए विश्व समुदाय प्राचीन भारत के भव्य और गौरवशाली योगदान के लिए कृतज्ञ है। 'शून्य' का सृजन गणित को भारत की अमूल्य देन है। मानव संस्कृति में उसकी बौद्धिक शक्ति के सामान्य चलन के लिए इतना शक्तिशाली अन्य कोई गणितीय सर्जन नहीं है। हिन्दुओं ने गणितीय अभिव्यक्ति की वर्तमान दशमलव पैमाने की पद्धति प्रागैतिहासिक काल में ही ग्रहण कर ली थी। दुनिया की अन्य कोई आंकिक भाषा इसके समान वैज्ञानिक और पूर्ण नहीं है। इसके प्रयोग से किसी भी संख्या को पूर्ण लालित्य और सरलता से प्रस्तुत किया जा सकता है। हिन्दू अंक विद्या ने सभ्य विश्व के लोगों का ध्यान आकर्षित किया। सभी ने सहज रूप में इसको स्वीकार किया। ऐसा माना जाता है कि सन् 770 ई. में हिन्दू विद्वान केक (Kauka) अपनी अंक विद्या को अरब ले गए। अब्बा सईद खलीफ अल मंसूर ने उज्जैन से इनको बगदाद के दरबार में आमन्त्रित किया। उन्होंने अरबी विद्वानों को हिन्दू ज्योतिष और गणित सिखाया। अरब के विद्वानों ने केक की सहायता से ब्रह्मगुप्त के 'ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त' का अरबी में अनुवाद किया। सातवीं सदी मे सीरिया इससे परिचित था और इसको समझाता था। उत्तरी अरब और मिस्र से होकर अंक पद्धति पश्चिम की ओर अग्रसर हुई। ग्यारहवीं सदी में इसने यूरोप में प्रवेश किया। यूरोपियनों ने इसको अरबी 'अंक विद्या' कहा क्योंकि उनको यह अरब से ही प्राप्त हुई थी। किन्तु सभी अरबी इसको हिन्दू अंक (Al-Axquan-Al Hindu) कहते थे।

जैन साहित्यों में तत्कालीन गणित का विस्तृत विवरण उपलब्ध है। वास्तव में जितने विस्तार से और स्पष्ट रूप से गणितीय सिद्धान्तों का विवेचन जैन साहित्य में किया गया है, वह जैन दर्शन का वेद के रहस्यवाद के स्थान पर ज्ञान को सामान्य लोगों के भाषा और स्तर तक पहुँचाने की प्रवृत्ति का स्पष्ट द्योतक है। इस काल की प्रमुख कृतियाँ—सूर्य प्रज्ञप्ति चन्द्र प्रज्ञप्ति (500 ई. पू.) जैनधर्म के प्रसिद्ध ग्रन्थ हैं। इनमें गणितानुयोग का वर्णन है। सूर्य प्रज्ञप्ति में दीर्घवृत्त का स्पष्ट उल्लेख मिलता है, जिसका अर्थ दीर्घ (आयत) पर बना परिवृत्त है जिसे परिमण्डल नाम से जाना जाता था। स्पष्ट है कि भारतीयों का दीर्घवृत्त का ज्ञान मैक्स (350 ई. पू.) से लगभग 150 वर्ष पूर्व हो चुका था। इतिहास से ज्ञात होने के कारण पश्चिमी देश मिनिमैक्स को ही दीर्घवृत्त का आविष्कारक मानते हैं। उल्लेखनीय है कि भगवती सूत्र (350 ई. पू.) में भी परिमण्डल शब्द दीर्घवृत्त के ही लिए प्रयोग किया गया है, इसके दो प्रकार भी बताये गये हैं—(1) प्रतर परिमण्डल तथा (2) घन परिमण्डल।

बौद्ध साहित्य ने भी गणित को महत्त्व दिया है। इनमें गणित को गणना (साधारण गणित) और संख्या (उच्च गणित) दो भागों में बाँटा गया है। उन्होंने संख्याओं का वर्णन तीन रूपों—संख्येय (Countable), असंख्येय (Uncountable) तथा अनन्त (Infinity) में किया है अर्थात् भारतीय मनीषियों को भी अनन्त का ज्ञान था।

भारतीय गणित के इतिहास का शुभारम्भ आदि ग्रन्थ ऋग्वेद से होता है, इसको अग्र पाँच खण्डों में बाँटा जा सकता है—

(1) आदि काल (500 ई० पू० तक)
   (अ) वैदिक काल (1000 ई० पू० तक)
   (ब) उत्तर वैदिक काल (1000 ई० से 500 ई० पू० तक)
(2) पूर्व मध्य काल (500 ई० पू० से 400 ई० तक)
(3) मध्य काल (400 ई० से 1200 ई० तक)
(4) उत्तर मध्य काल (1200 से 1800 ई० तक)
(5) वर्तमान काल (1800 ई० के पश्चात्)

1. आदि काल (500 ई० पू० तक)

यह काल भारतीय गणित के इतिहास में अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। इस काल में अंकगणित (Arithmetic), बीजगणित (Algebra) एवं रेखागणित (Geometry) को विधिवत् स्थापित किया जा चुका था।

(अ) वैदिक काल (1000 ई० पू० तक)—इस काल में 'शून्य' तथा 'दाशमिक स्थान मान' पद्धति का आविष्कार गणित के क्षेत्र में भारत की अभूतपूर्व देन है।

यह निश्चित रूप से ज्ञात नहीं है कि शून्य का आविष्कार कब और किसने किया, परन्तु इसका प्रयोग वैदिक काल में होता रहा है। यही पद्धति सारे विश्व में चल रही है तथा इसने ही गणित तथा विज्ञान को प्रगति के उच्च शिखर तक पहुँचाया है, इसी काल के गणित की अनेक संक्रियाओं जैसे योग, गुणा एवं भाग भिन्न, वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल आदि का विशेष वर्णन है।

(ब) उत्तर वैदिक काल (1000 ई० पूर्व से 500 ई० पूर्व तक)—इस काल में रेखागणित के सूत्रों का विकास तथा विस्तार किया गया था। इस काल में तीन सूत्रकारों के नाम उल्लेखनीय हैं—बौधायन, आगस्तम्ब और कात्यायन।

इस युग में ज्योतिषियों को अंकगणितीय मूल संक्रियाओं, योग, गुणा, भाग आदि का ज्ञान भी हुआ।

इसके अतिरिक्त इस काल में जैन ग्रन्थों में तत्कालीन गणित का विस्तृत विवरण उपलब्ध है।

गणित तथा ज्योतिष के विकास में जैनाचार्यों का योगदान रहा है। इन आचार्यों ने अपने ग्रन्थों में गणित के अनेक अध्ययन तत्त्वों का मीमांसात्मक विवेचन रोचक ढंग से उदाहरण सहित प्रस्तुत किया है। उन्होंने संख्या लेखन पद्धति, बीजगणितीय समीकरण एवं इनके अनुप्रयोग, क्रमचय संचय, घातांक एवं लघुगणक के नियम, समुच्चय सिद्धान्त आदि अनेक विषयों पर प्रकाश डाला है।

बौद्ध साहित्य में भी गणित को पर्याप्त महत्त्व दिया गया है।

2. पूर्व मध्य काल (500 ई० पू० से 400 ई० तक)

इस काल में गणित का पर्याप्त विकास हुआ था, जो कि मध्ययुग के आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त आदि के उपलब्ध साहित्यों से ज्ञात होता है। स्थानांग सूत्र, भगवती सूत्र और अनुप्रयोग द्वार सूत्र इस युग के प्रमुख ग्रन्थ हैं।

बन्दाली गणित में अंकगणित की मूल संक्रियाएँ, दाशमिक अंकलेखन पद्धति, भिन्न परिकर्म, वर्ग, घन, त्रैराशिक व्यवहार, ब्याजरीति, क्रय-विक्रय सम्बन्धी प्रश्न आदि का विस्तृत विवरण है।

त्रिकोणमिति के विस्तार में भी भारतीयों का बहुमूल्य योगदान रहा है। इस काल में बीजगणित के क्षेत्र में एक क्रान्तिकारी परिवर्तन हुआ। इसके ज्ञान से व्यक्त राशियों के स्थान पर अव्यक्त राशियाँ प्रयोग करके गणितीय गुत्थियाँ सुलझायी जाने लगीं। बीजगणित अज्ञात मान वाली प्रतिपादित गणित है।

मध्य काल के महान गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त (628 ई०) का कथन उल्लेखनीय है– धन संख्या और ऋण संख्या का गुणनफल ऋण संख्या, दो ऋण संख्याओं का गुणनफल धन संख्या तथा धन संख्या और धन संख्या का गुणनफल धन संख्या होता है।

धन संख्या को धन संख्या से अथवा ऋण संख्या को ऋण संख्या से भाग देने पर धन संख्या होती है। परन्तु धन संख्या को ऋण संख्या से अथवा ऋण संख्या को धन संख्या से भाग देने पर ऋण संख्या होती है।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि बीजगणित का पूर्व के गणितज्ञों द्वारा विस्तार किया जा चुका था। मध्य काल में इसका और विस्तार हुआ।

3. मध्य काल या स्वर्ण युग (400 ई० से 1200 ई० तक)

इस काल को भारतीय गणित का स्वर्ण युग कहा जाता है, क्योंकि इस काल में आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त, महावीराचार्य, भास्कराचार्य आदि जैसे महान गणितज्ञ हुए जिन्होंने गणित की सभी शाखाओं को विस्तृत व स्पष्ट रूप प्रदान किया। वेदों में जो सिद्धान्त व विधियाँ सूत्र रूप में हैं वे इस काल में अपनी पूर्ण सम्भावनाओं के साथ जनसाधारण के सम्मुख आयीं। इस काल के कतिपय महान गणितज्ञों एवं उनकी कृतियों का संक्षिप्त वर्णन नीचे दिया गया है–

आर्यभट्ट प्रथम (499 ई०)–ये पटना के निवासी थे, इन्होंने अपनी पुस्तक आर्यभट्टीय के गणित पाद के 322 श्लोकों में गणित के महत्त्वपूर्ण एवं मूलभूत सिद्धान्तों को साररूप में कह दिया है। इन्होंने त्रिकोणमिति में सर्वप्रथम व्युत्क्रम ज्या का प्रयोग किया। रेखागणित में इन्होंने π का मान दशमलव के चार स्थानों तक 3·1416 ज्ञात किया।

अंकगणित के क्षेत्र में इन्होंने वर्गमूल एवं घनमूल ज्ञात करने की विधियाँ तथा त्रैराशिक नियम का भी उल्लेख किया।

भास्कर प्रथम (600 ई०)–इन्होंने अपनी पुस्तक महाभास्करीय, आर्यभट्टीय भाष्य और लघु भास्करीय में आर्यभट्ट द्वारा प्रतिपादित सिद्धान्तों को और विकसित तथा विस्तृत किया।

ब्रह्मगुप्त (628 ई०)–इन्होंने गणित की 20 क्रियाओं तथा 8 व्यवहारों पर प्रकाश डाला। बीजगणित में समीकरण साधनों के नियमों का उल्लेख किया तथा अनिर्णीत

द्विघातीय समीकरण भी बताया। इन्होंने समकोण त्रिभुज के शुल्व सूत्र का विस्तृत वर्णन भी किया।

महावीराचार्य (850 ई०)–महावीर ने गणितसार संग्रह नामक अंकगणित के वृहत ग्रन्थ की रचना की। इसमें अंकगणित का विधिवत वर्णन किया गया है तथा इसमें संगृहीत प्रश्न अत्यन्त मनोरंजक हैं। इन्होंने ल० स० प० का आधुनिक नियम ज्ञात किया, जिसका यूरोप में पहली बार प्रयोग 1500 ई० में किया गया।

श्रीधराचार्य (850 ई०)–इन्होंने अंकगणित पर नवक्षतिका तथा त्रिशतिका, पद्य गणित और बीजगणित पुस्तकों की रचना की, इनकी रचना शैली अत्यन्त सरल, संक्षिप्त तथा हृदयग्राही है।

आर्यभट्ट द्वितीय (950 ई०)–आप महाराष्ट्र के निवासी थे। इन्होंने महासिद्धान्त नामक एक ग्रन्थ लिखा, जिसके एक अध्याय में अंकगणित तथा दूसरे अध्याय में प्रथम घात वाले अनिर्धार्य समीकरण का प्रतिपादन किया।

श्रीपति मिश्र (1039 ई०)–इन्होंने 'सिद्धान्तशेखर' एवं 'गणिततिलक' की रचना की। इन्होंने क्रमचय और संचय पर विशेष कार्य किया।

नेमीचन्द सिधान्त चक्रवर्ती (11वीं सदी)–इनकी प्रसिद्ध पुस्तक गोम्मटसार है जिसके दो भाग हैं–कर्मकाण्ड एवं जीवकाण्ड। दोनों में जीव राशियों, उनके कर्मों, आस्तव बंध, निर्जरा, सार्वत्रिक, समुच्चयी, एकैकी संगति, सुक्रमवद्धी प्रमेय (Well ordering Theorems) आदि की चर्चा है।

भास्कराचार्य द्वितीय (1114 ई०)–वेदों में जो सिद्धान्त सूत्र रूप में थे, उनकी पूर्ण अभिव्यक्ति भास्कराचार्य की रचना में हुई है। इन्हीं पुस्तकों को आधार मान कर वेदों में प्रयुक्त सूत्रों का प्रयोग वैदिक गणित की आधुनिक कृतियों में किया जा रहा है।

4. उत्तर मध्य काल (1200 ई० से 1800 ई० तक)

नीलकण्ठ ने 1500 ई० में एक पुस्तक में ज्या r का मान निकाला

ज्या $$r = r - \frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

नारायण पंडित (1356 ई०)–इन्होंने अंकगणित पर 'गणित कौमुदी' नामक एक वृहत् ग्रन्थ की रचना की। इसमें अनेक विषयों का प्रतिपादन किया गया है।

नीलकण्ठ (1587 ई०)–नीलकण्ठ ने 'ताजिक नीलकण्ठी' नामक ग्रन्थ की रचना की जिसमें ज्योतिष गणित का प्रतिपादन किया गया है।

कमलाकर (1608 ई०)–इन्होंने सिद्धान्त-तत्त्व-विवेक नामक ग्रन्थ की रचना की।

सम्राट जगन्नाथ (1731 ई०)–इन्होंने 'सम्राट सिद्धान्त' तथा 'रेखागणित' नाम की दो पुस्तकें लिखीं।

5. वर्तमान काल (1800 ई० के पश्चात्)

नृसिंह बापू देव शास्त्री (1831 ई०)–इन्होंने भारतीय एवं पाश्चात्य गणित पर पुस्तकों का सृजन किया। इनकी पुस्तकों में रेखागणित, त्रिकोणमिति, सायनवाद तथा अंकगणित मुख्य हैं।

सुधाकर द्विवेदी—इन्होंने दीर्घवृत्त लक्षण, गोलीय रेखागणित, समीकरण मीमांसा आदि अनेक पुस्तकों की रचना की।

रामानुजम् (1889 ई०)—रामानुजम् सूत्र रूप में गणितीय एवं अन्य सिद्धान्तों को लिखने व सिद्ध करने की वैदिक परम्परा के आधुनिक युग के महान गणितज्ञ हैं।

स्वामी भारती कृष्णतीर्थजी महाराज (1884-1960 ई०)—आप वैदिक गणित के प्रधान भाष्यकार हैं, इन्होंने अपनी पुस्तक **'वैदिक गणित'** में वैदिक सूत्रों को पुनः प्रतिपादित किया है और उसमें निहित सिद्धान्तों और विधियों को इतनी सरल भाषा में प्रस्तुत किया है कि गणित का साधारण विद्यार्थी भी उसे आत्मसात् कर गणित के जटिलतम प्रश्नों को कम समय में हल कर सकता है।

भारत में गणित का पठन-पाठन उत्तर वैदिक काल (ईसा से 1500 वर्ष पूर्व) से ही होता आया है। उस समय के ग्रन्थों में गणित, अंकगणित, रेखागणित एवं बीजगणित और ज्योतिष गणित दृष्टिगोचर होते हैं। इसी समय यज्ञ-वेदी के बनने में रेखागणित का विकास हुआ था। यज्ञ के उचित व शुभ समय देखने के कारण ज्योतिष का विकास हुआ। इसी काल में अन्य विषयों के साथ गणित एवं ज्योतिष में बहुत उन्नति हुई। ब्राह्मणीय शिक्षा के पाठ्य-विषय की सूची छान्दोग्य उपनिषद् में एक कथानक है, जो कि इस प्रकार है—एक बार नारद, सनत्कुमार ऋषि के पास गये और उनसे ब्रह्म-विद्या पढ़ाने की प्रार्थना की। सनत्कुमार ने नारद से पूछा कि वे कौन-कौन-सी विद्या पहले से ही पढ़े हुए हैं, जिससे वे विचार कर सकें कि उन्हें अब क्या पढ़ाना शेष रहा है। इस पर नारद जी ने उन सब विद्याओं को गिनाया जो वे पढ़ चुके थे। इस सूची में नक्षत्र-विद्या (Astronomy) और राशि-विद्या (Arithmetic) भी सम्मिलित थीं। इससे बिल्कुल स्पष्ट है कि उस समय भी गणित और ज्योतिष विषय पढ़ाये जाते थे।

हिन्दुओं की शिक्षा में गणित भी प्रमुख विषयों में से एक था। कौटिल्य के अर्थशास्त्र में लिखा हुआ है कि चूड़ाकर्म के बाद विद्यार्थी को लिपि (Alphabets) और संख्या सीखना चाहिए। हाथी गुफा के अन्तर्लेख से पता चलता है कि कलिंग-नरेश खारवेल के अपने जीवन के नौ वर्ष यानी 16 वर्ष की अवस्था से लेकर 25 वर्ष की अवस्था तक लिपि (Alphabets), रूप (Drawing and Geometry) और गणना (Arithmetic) के अध्ययन में व्यतीत किए थे। राजकुमार गौतम ने 8 वर्ष की अवस्था में अध्ययन आरम्भ किया था—पहले पढ़ना-लिखना (Reading and Writing) सीखा था और उसके बाद अंकगणित; जो उस समय के 72 विज्ञानों और कलाओं में सबसे अधिक महत्त्वपूर्ण थी। जैन आगम-ग्रन्थों में भी लेखा, रूप और गणना का उल्लेख मिलता है।

प्राचीन काल में भारत में गणित पढ़ाने का उद्देश्य यह था कि उससे वस्तुओं के मूल्य निकालने में और हिसाब रखने में सहायता मिलती थी। उस समय कार्य-प्रणाली की अपेक्षा फल पर अधिक जोर दिया जाता था। बालकों को पहाड़े तथा गुरु याद कराये जाते थे। पाठशालाओं में गणित उस समय इसलिए पढ़ाई जाती थी कि इसका सम्बन्ध धर्म-पुस्तकों, गणित-ज्योतिष, फलित-ज्योतिष आदि से था। ग्रहण, त्योहार आदि की तिथियों के निकालने मे इसकी आवश्यकता पडती थी। मन्दिर और पूजा की वेदी बनाने मे गणित के ज्ञान का काम पडता था। बुद्धि के विकास के लिए उसका उपयोग किया जाता था। प्राय विद्यार्थी गणित की पहेलियाँ (Puzzles) बनाते थे और हल किया करते थे। इस प्रकार उनका मनोरजन हो जाता था।

इस्लामी शिक्षा में भी गणित को स्थान प्राप्त था। उस समय बालकों के लिए मकतब मे प्रारम्भिक शिक्षा की व्यवस्था थी। वहाँ पर उनको पढने तथा लिखने की शिक्षा के अतिरिक्त अवजद अर्थात् अक्षरो की सख्या से गणना और शकुन विचार भी सिखाया जाता था। उच्च शिक्षा के मदरसे थे। इनमे शिक्षा दो प्रकार की होती थी—लौकिक और धार्मिक। लौकिक शिक्षा के अन्तर्गत ज्योतिष एव गणित भी पढाये जाते थे। अबुलफजल ने आइने अकबरी मे लिखा है—"प्रत्येक बालक के द्वारा नीतिशास्त्र, अकगणित, समस्याएँ, कृषिशास्त्र, क्षेत्रमिति (Geometry), ज्योतिष विद्या, मुखाकृति विद्या, गृहशास्त्र, राजतन्त्र, औषधिज्ञान, तर्कशास्त्र, तिबी (चिकित्सा और शरीर विज्ञान), रियाजी (गणित, ज्योतिष, सगीत और शिल्पज्ञान), इलाही (Religion and Philosophy) और इतिहास आदि सभी ज्ञान प्राप्त किये जा सकते थे।" अकबर ने आगरा और फतेहपुरसीकरी में कई मदरसे भी बनवाए। इनमें गणित एव ज्योतिष की भी उच्च शिक्षा दी जाती थी। हुमायूँ ने दिल्ली मे एक मदरसा खोला जिसमे ज्योतिष तथा भूगोल पढाये जाते थे।

परन्तु फिर भी गणित की प्रतिष्ठा पाठ्य-विषय की हैसियत से हमारे देश की पाठशालाओ मे अठारहवीं शताब्दी तक न थी। यहाँ पर ब्रिटिश काल में गणित पर बहुत जोर दिया जाता था। यहाँ तक कि हाईस्कूल के अतिरिक्त इण्टर कक्षाओं में भी गणित अनिवार्य (Compulsory) थी। मिडिल कक्षाओ मे भी गणित पर ही सबसे अधिक जोर दिया जाता था। प्रश्न-पत्र भी कठिन बनाये जाते थे। गणित में अच्छे अंक प्राप्त करने वाले छात्रों को प्रोत्साहन भी दिया जाता था। इटावा के राजकीय विद्यालय में तो बहुत समय से प्रतिवर्ष गणित की प्रतियोगिता होती आ रही है, जिसमें प्रथम और द्वितीय स्थान प्राप्त करने वाले छात्रों को पारितोषिक वितरण (Prize distribution) किया जाता है।

सन् 1937 मे बेसिक शिक्षा का सूत्रपात हुआ। इसमे भी गणित विषय को महत्त्वपूर्ण स्थान प्राप्त हुआ। परन्तु इसमे गणित पढाने की विधि पहले से भिन्न थी। यहाँ पर गणित को क्राफ्ट के आधार पर पढाने पर जोर दिया गया। द्वितीय विश्व-युद्ध की समाप्ति पर भारत के सम्मुख सारजेण्ट योजना आयी। इसमें हाईस्कूल को दो भागों मे विभाजित कर दिया गया—'साहित्यिक हाईस्कूल' और 'व्यावसायिक हाईस्कूल'। व्यावसायिक हाईस्कूल में गणित पाठ्यक्रम मे रखी गयी, परन्तु साहित्यिक हाईस्कूल मे नहीं।

परन्तु स्वतन्त्र भारत मे यह विचार किया गया कि शिक्षा का उद्देश्य अच्छे नागरिक बनाना है, न कि क्लर्क पैदा करना। अतः इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए नागरिकशास्त्र, नेचर स्टडी, स्वास्थ्य-रक्षा आदि विषय पाठ्यक्रम में सम्मिलित किये गये। फिर भी सोचा गया कि इन सबसे बालकों के ऊपर भार हो जायेगा। इसलिए गणित के अध्ययन और पाठ्यक्रम को हल्का कर दिया गया। ऐसा करने में गणित के

अध्यापन को अधिक अथवा पहले जैसा महत्त्व नहीं दिया गया और धीरे-धीरे गणित हाईस्कूल में एक ऐच्छिक (Optional) विषय तक बन गया।

उत्तर प्रदेश में स्वतन्त्रता प्राप्त होने के पश्चात् अंकगणित को रेखागणित और बीजगणित से पृथक कर दिया गया। अंकगणित अनिवार्य विषय बना दिया गया और बीजगणित व रेखागणित को ऐच्छिक विषय माना। परन्तु यह क्रम सिर्फ तीन साल तक चलता रहा। सन् 1950 ई० में अंकगणित हाईस्कूल कक्षा से बिल्कुल हटा दी गयी, परन्तु गणित की अन्य शाखाओं को ऐच्छिक विषय के रूप में ही रखा। सन् 1952 से उत्तर प्रदेश शिक्षा बोर्ड ने बालकों की सुविधा के लिए एक और प्रकार की गणित चला दी, जिसका नाम प्रारम्भिक गणित (Elementary Mathematics) रखा गया। इस प्रकार के गणित में अंकगणित, बीजगणित और रेखागणित—तीनों ही शाखाएँ सम्मिलित थीं। परन्तु इसमें पाठ्यक्रम (Syllabus) कक्षा 8 तक का था। अब किसी तरह शिक्षा-समिति के सदस्यों के कान पर जूँ रेंगी और उन्होंने समझा कि गणित के बिना काम नहीं चल सकता। इसलिए अब हाईस्कूल कक्षाओं में सन् 1956 से गणित लड़कों के लिए अनिवार्य (Compulsory) विषय हो गया है, परन्तु लड़कियों के लिए यह अब भी ऐच्छिक (Optional) विषय है।

गणित की बनावट तथा प्रकृति (Structure and Nature of Mathematics)

गणित की बनावट (Structure of Mathematics)—प्रत्येक विषय की अपनी बनावट या ढाँचा होता है जो कि विषय को एक विशिष्ट (Specific) अस्तित्व देता है। विषय की जिस प्रकार की बनावट (Structure) होगी, उसी तरह से विषय स्थायी या अस्थायी होगा। गणित का ढाँचा या बनावट अन्य सभी विषयों से अधिक बलशाली है जिसके कारण गणित अन्य विषयों की अपेक्षा अधिक स्थायी है। इसके बाद भौतिकशास्त्र, रसायनशास्त्र तथा जीव-विज्ञान विषयों का स्थान आता है। विषय के ढाँचे के आधार पर उसकी सत्यता तथा भविष्यवाणी अन्य विषयों की अपेक्षा अधिक स्थायी है। जैसे-जैसे विषय का ढाँचा कमजोर होता है वैसे-वैसे ही विषय में सत्यता तथा भविष्यवाणी (Prediction) कम होती जाती है। इसी निश्चित बनावट या ढाँचे के आधार पर प्रत्येक विषय अपना एक विशिष्ट अस्तित्व रखता है। इसी बनावट के आधार पर विषय की प्रकृति (Nature) निर्भर करती है।

गणित की प्रकृति (Nature of Mathematics)—प्रत्येक विषय जो पाठ्यक्रम में रखा जाता है, उसका एक विशेष उद्देश्य होता है। इसके अतिरिक्त प्रत्येक विषय की अपनी प्रकृति (Nature) भी होती है। प्रकृति के आधार पर एक विषय की भिन्नता दूसरे विषय से की जाती है। गणित की प्रकृति का उल्लेख आगे दिया गया है—

(1) गणित की अपनी भाषा (Language) होती है। भाषा का तात्पर्य उसके पद (Term), प्रत्यय (Concepts), सूत्र (Formulae), संकेत (Signs) तथा सिद्धान्त (Principles) विशेष प्रकार के होते हैं जो कि उसकी भाषा को जन्म देते हैं। इसके उदाहरण लम्बाई-चौड़ाई, त्रिभुज, लाभ-हानि, कोष्ठक, संख्यायें, किलोग्राम आदि हैं।

(2) गणित में संख्याओं (Numbers), स्थान (Space), मापन (Measurement) आदि का अध्ययन किया जाता है। इनका अध्ययन अन्य विषयों में बाद में किया जाता है। प्रारम्भ में इनका विकास गणित से ही हुआ था।

(3) गणित में वातावरण (Environment) में पाये जाने वाली वस्तुओं (Objects) के आपस में सम्बन्ध (Relationship) तथा संख्यात्मक (Numerical) निष्कर्ष निकाले जाते है, चूँकि ये निष्कर्ष विशेष संख्या से सम्बन्धित होते हैं, इसलिए इन पर भरोसा किया जा सकता है।

(4) इस विषय के ज्ञान का आधार हमारी ज्ञानेन्द्रियाँ (Sense organs) होती हैं जिन पर विश्वास किया जा सकता है, क्योंकि इस ज्ञान का एक निश्चित आधार होता है।

(5) गणित का ज्ञान समस्त जगत (Universe) में समान रूप का होता है तथा उसका सत्यापन (Truthfulness) किसी भी स्थान तथा समय पर किया जा सकता है। यह ज्ञान समय तथा स्थान के साथ परिवर्तित नहीं होता है।

(6) गणित में ज्ञान ठीक (Exact), स्पष्ट (Clear), तार्किक (Logical), एक क्रम (Systematic) में होता है, जिससे उसको एक बार समझने पर आसानी से भुलाया नहीं जा सकता है।

(7) गणित द्वारा जीवन के अमूर्त्त प्रत्ययों (Abstract Concepts) की व्याख्या की जाती है तथा उसको समझा जा सकता है तथा अमूर्त्त को स्थूल (Concrete) रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है।

(8) गणित के ज्ञान का अनुप्रयोग (Application) भिन्न-भिन्न विज्ञान जैसे भौतिक, रसायन, जीव-विज्ञान तथा अन्य विषयों में किया जाता है। उपर्युक्त विषयों की प्रगति तभी सम्भव है जब गणित में प्रगति हो। गणित सभी विषयों की आधारशिला है तथा उनको एक संगठित तथा दृढ़ आधार प्रदान करता है।

(9) गणित के ज्ञान द्वारा प्रत्येक ज्ञान स्पष्ट होता है। उसमें एक निश्चित उत्तर सम्भव होता है। इसमें किसी प्रकार का सन्देह (Doubt) नहीं होता है। इसमें उत्तर 'हाँ' या 'न' में ही सम्भव होता है।

(10) गणित में सामान्यानुमान (Generalization), निगमन (Induction), आगमन (Deduction) के लिए पर्याप्त सीमा भी होती है।

■■

2

पाठ्यक्रम में गणित का स्थान

[PLACE OF MATHEMATICS IN CURRICULUM]

गणित के पाठ्यक्रम का विकास
(MATHEMATICS CURRICULUM DEVELOPMENT)

पाठ्यक्रम विकास एक सतत् प्रक्रिया (Continuous Process) है। परम्परागत पाठ्यक्रम (Traditional Curriculum) में इस गुण का अभाव रहा है। यह अधिगम अनुभवों (Learning Experiences) के संरचित समुच्चय (Structured set) के उत्पादन की कार्यवाही का कोर्स (Course of action) है। यह अध्ययन क्षेत्र नया भी हो सकता है।

यह तो विदित ही है कि पूर्व में ज्ञान के क्षेत्र में प्रगति और विकास की गति बहुत मन्द रहती थी। विद्यार्थियों के लिए एक बार निर्धारित कोर्स कई वर्षों तक परिवर्जित रहता था, क्योंकि नवीन ज्ञान का प्रसार और उसके सामाजिक प्रभाव भी अति विरल होते थे, किन्तु आधुनिक विश्व में ये सब बातें बीते युग की हो गई हैं। इससे वैज्ञानिक और प्रौद्योगिकी के नये-नये क्षेत्र खुले हैं।

किसी विद्यालय, महाविद्यालय, विश्वविद्यालय या अधिगम के अन्य किसी संस्थान में विद्यार्थियों के लिए निर्धारित संगठित गणित का कोर्स ही पाठ्यक्रम है। सामान्यतः किसी भी संस्था में विशिष्ट आयु वर्ग के शिक्षार्थियों के लिए गणित विषय के अध्ययनों का संगठित समुच्चय (Set of organized studies) को यह नाम दिया गया है। पाठ्यक्रम में केवल गणित विषय भी अन्तर्वस्तु नहीं है, अपितु इसमें इस विषय से सम्बन्धित सभी क्रियाकलाप (Activities) गणित शिक्षण के ध्येय, मूल्य, लक्ष्य, उद्देश्य सभी सम्मिलित हैं। गणित की पाठ्यचर्या (Syllabus) इसका एक लिखित भाग है। इस विषय के पाठ्यक्रम में शिक्षण सामग्रियाँ, अनुदेशन आव्यूह (Instructional Strategies), शिक्षक मार्गदर्शिकाएँ (Teacher guides), मूल्यांकन प्रक्रम (Evaluation procedure), प्रतिपुष्टि (Feedback) आदि पाठ्यपुस्तकें, सन्दर्भ साहित्य सब कुछ स्थूल (Concrete) और सूक्ष्म (Abstract) वस्तुएँ (Objects) सम्मिलित हैं जो कि गणित विषय के साथ प्रत्यक्ष (Direct) अथवा अप्रत्यक्ष (Indirect) रूप में सम्बन्धित हैं। पाठ्यक्रम में गणित विषय से सम्बन्धित वे समग्र लोक-अपेक्षाएँ (Public expectations), आकांक्षाएँ (Desires) और भावनाएँ (Feelings)

भी सम्मिलित हैं, जो किसी शैक्षिक या आयु स्तर पर शिक्षार्थी (Learner) के व्यवहार परिवर्तन (Behaviours change) में देखे जा सकें। इसमें गणित सम्बन्धी सभी व्यावहारिक (Practical) योग्यताएँ (Abilities), कौशल (Skills), आदतें (Habits) जोड़-तोड़ एवं निर्णयन की शक्तियाँ (Manipulative and decision making powers) सम्मिलित हैं।

पाठ्यक्रम में गणित का स्थान–

1. गणित एक यथार्थ विज्ञान है।
2. गणित तार्किक दृष्टिकोण पैदा करता है।
3. गणित का जीवन से घनिष्ठ सम्बन्ध है।
   (i) अनुशासनात्मक महत्त्व।
   (ii) स्पष्टभाव प्रकाशन में सहायक।
   (iii) चरित्र निर्माण में सहायक।
   (iv) नागरिक महत्त्व।
   (v) दैनिक जीवन में उपयोगी विषय।
   (vi) बौद्धिक प्रवीणता।
4. गणित विज्ञान विषयों की आधारशिला।
5. आर्थिक-सामाजिक प्रगति में महत्त्व।
6. परिणाम की निश्चितता और आत्मनिर्भरता।

गणित का पूर्व सम्मानित स्थान–प्राचीनकाल से ही शिक्षा में गणित का सदैव उच्च स्थान रहा है। प्लेटो ने तो अपनी पाठशाला के द्वार पर यहाँ तक लिख रखा था कि जो व्यक्ति रेखागणित को नहीं समझते हैं, वे उस पाठशाला में शिक्षा ग्रहण करने के ध्येय से प्रवेश न करें। प्रायः सभी महान् शिक्षकों; जैसे–हर्बर्ट, फ्रॉबेल, पेस्टालॉजी, डॉ० मेरिया, मॉण्टेसरी और सर टी० पी० नन आदि ने गणित को मानव-विकास का प्रतीक माना है। इन्होंने गणित की शिक्षा को मनुष्य के बौद्धिक एवं सांस्कृतिक विकास (Cultural Development) का सर्वश्रेष्ठ साधन मानकर शिक्षा के पाठ्यक्रम में उच्चतम स्थान दिया है। नेपोलियन जैसे महान् योद्धा, शासक एवं राजनीतिज्ञ के कथनानुसार–गणित की उन्नति के साथ देश की उन्नति का घनिष्ठ सम्बन्ध है।

गणित के बारे में तो जैन गणितज्ञ श्री महावीराचार्य जी ने अपनी **'गणित-सार-संग्रह'** नामक पुस्तक में अत्यन्त प्रशंसा की है। वह लिखते हैं–"लौकिक, वैदिक तथा सामाजिक जो-जो व्यापार हैं, उन सब में गणित का उपयोग है। कामशास्त्र, अर्थशास्त्र, पाकशास्त्र, गन्धर्वशास्त्र (गायन), नाट्यशास्त्र, आयुर्वेद, भवन निर्माण-शास्त्र आदि वस्तुओं में, छन्द, अलंकार, काव्य, तर्क, व्याकरण इत्यादि तथा कलाओं के समस्त गुणों में गणित अत्यन्त उपयोगी है। सूर्य आदि ग्रहों की गति ज्ञात करने में, ग्रहण का समय ज्ञात करने में, दिशा, देश तथा समय ज्ञात करने में, चन्द्रमा के परिलेख आदि में सर्वत्र गणित का काम पड़ता है। द्वीपों, समुद्रों और पर्वतों की संख्या, व्यास और परिधि, लोक-अन्तर्लोक, ज्योतिर्लोक, स्वर्ग एवं नरक के रहने वालों

गणित के अतिरिक्त स्कूल पाठ्यक्रम में कोई भी ऐसा विषय नहीं है, जो बिना अधिक अध्ययन किये जीवन में प्रयोग हो सके। गणित ही एक ऐसा विषय है, जिसका हाईस्कूल कक्षाओं तक का ज्ञान जीवन में प्रयोग हो सकता है। बेचारे कुली (Labourer) से लेकर, जो मुश्किल से अपनी जीविका कमा पाता है, अर्थ मन्त्री (Finance Minister) तक जिसका लाखों और करोड़ों रुपयों का बजट बनता है, पान वाले से लेकर जो कि सिर्फ रुपये और पैसे तक हिसाब रखता है, बिरला (Birla) और टाटा (Tata) तक जो करोड़ों रुपये का व्यवसाय करते हैं, साधारण बढ़ई से लेकर बड़े-बड़े इंजीनियरों तक जो संसद् जैसे विशाल भवन का निर्माण करते हैं, सभी को अपनी-अपनी आवश्यकतानुसार गणित के ज्ञान की आवश्यकता होती है। अतः दाल-रोटी के उद्देश्य से ही यदि पाठ्यक्रम बनाया जाय तो भी गणित का स्कूल के पाठ्यक्रम में सर्वप्रथम स्थान होना चाहिए।

इससे हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि गणित मनुष्य जाति के लिए उसके जीवन में कदम-कदम पर अनेक प्रकार से उपयोगी है। इसके बिना वह जीवन में तनिक भी उन्नति के पथ की ओर नहीं चल सकता है। स्कूल के अन्य सभी विषय इसी के आधार पर मनुष्य के लिए उपयोगी हो सकते हैं। इसके बिना सभी विषय निरर्थक प्रतीत होते हैं। अतः गणित का स्कूल पाठ्यक्रम में सर्वप्रथम तथा प्रतिष्ठित (Respected) स्थान होना अति आवश्यक है।

■■

3

गणित के उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्य

[AIMS AND OBJECTIVES OF TEACHING MATHEMATICS]

गणित शिक्षण के उद्देश्य
(OBJECTIVES OF MATHEMATICS EDUCATION)

इण्टरनेशनल डिक्शनरी ऑफ एजूकेशन (International Dictionary of Education by Page Thomson with Marshall) में कहा गया है कि पाठ्यक्रम विकास (Curriculum development) शैक्षिक मनोविज्ञान अथवा शैक्षिक प्रौद्योगिकी (Educational technology) में सामान्यतः इस पद को व्यवहार सम्बद्ध उद्देश्य (Behavioural objective) के समानार्थी के रूप में प्रयुक्त किया जाता है अर्थात् यह शिक्षार्थी (Learner) द्वारा प्रदर्शित प्रेक्षणीय व्यवहार का कथन (Statement of observable behaviour) है।

राष्ट्रीय/सामाजिक स्तर पर मूल्य आधारित ध्येय निर्धारित किये जाते हैं। इनकी प्राप्ति के लिए पाठ्यक्रम का संगठन किया जाता है। पाठ्यक्रम के प्रत्येक विषय और क्रियाकलाप के लिए लक्ष्यों को सूत्रबद्ध किया जाता है। इन लक्ष्यों के आधार पर विषय में विषय-वस्तु का समावेश किया जाता है।

गणित के प्रत्येक उद्देश्य (Aims) के अन्तर्गत कुछ प्राप्य उद्देश्य (Objectives) निहित होते हैं। उद्देश्यों की पूर्ति हेतु जीवनपर्यन्त प्रयास करने पड़ते हैं, परन्तु फिर भी पूर्ण रूप से प्राप्त नहीं हो पाते हैं। प्राप्य उद्देश्य (Objectives) प्रति एक पाठ के लिए निश्चित किए जाते हैं और उनकी प्राप्ति पाठ समापन तक काफी सीमा तक की जा सकती है।

प्राचीनकाल में गणित का उद्देश्य केवल मानसिक शक्तियों का विकास एवं मानसिक प्रशिक्षण तक ही सीमित था, किन्तु आज नैतिक एवं कलात्मक मूल्यों के लिए भी गणित की आवश्यकता पर बल दिया जा रहा है चूँकि आधुनिक युग में विज्ञान की शिक्षा द्वारा ही आर्थिक प्रगति सम्भव है, अतः गणित की शिक्षा नितान्त आवश्यक है। अतः गणित शिक्षण में निम्न उद्देश्य होने चाहिए—

1. दैनिक जीवन में गणित की व्यावहारिक उपयोगिता का उद्देश्य।
2. सांस्कृतिक संरक्षण का उद्देश्य।

3. अनुशासनात्मक उद्देश्य।
4. मानसिक और बौद्धिक शक्तियों के विकास का उद्देश्य।
5. आनन्द प्राप्ति का उद्देश्य।
6. वैज्ञानिक दृष्टिकोण के विकास का उद्देश्य।
7. चारित्रिक विकास में योग का उद्देश्य।

विद्यालय में गणित शिक्षक छात्रों की भावनाओं को इस प्रकार जाग्रत करें कि वे अपने समय का सदुपयोग गणित की भिन्न-भिन्न समस्याओं को खेल ही खेल में बनाकर व उसका समाधान सीखकर करें तथा अवकाश के समय का भी वे उचित उपयोग कर सकते हैं।

उपरोक्त सभी बातों के आधार पर हम कह सकते हैं कि विद्यालय तथा उसके बाहर भी गणित का अपना ज्ञान परमावश्यक है। व्यक्ति विद्यालय में ही गणित सीखता हो यह आवश्यक नहीं है, वह अपने पर्यावरण से घर परिवार के सदस्यों से अनुभव व आवश्यकता से गणित का ज्ञान प्राप्त करता रहता है। कहते हैं कि आवश्यकता आविष्कार की जननी है। इसलिए गणित की आवश्यकता पड़ने पर गणित उसे सीखना पड़ता है। गणित विषय को रोचक बनाने के साथ-साथ उसकी उपयोगिता की चर्चा प्रत्यक्ष व अप्रत्यक्ष रूप से अवश्य छात्रों से करते रहना चाहिए।

विद्यालय में भिन्न-भिन्न विषयों का पाठन होता है, प्रत्येक विषय का अपना-अपना अस्तित्व तथा महत्त्व होता है। इसके साथ ही प्रत्येक विषय को पाठ्यक्रम में रखने का एक ध्येय होता है, विषय का महत्त्व उसके द्वारा प्राप्त किए जाने वाले उद्देश्यों (Aims) से जाना जा सकता है। प्रत्येक विषय के अपने उद्देश्य होते हैं। यदि उनकी पूर्ति हो जाती है तो यह कहा जा सकता है कि अमुक विषय का क्या महत्त्व है। प्रत्येक उद्देश्य (Aim) के अन्तर्गत कुछ प्राप्य उद्देश्य (Objectives) आते हैं। विषय पढ़ाने का एक लक्ष्य होता है, जिसकी परीक्षा बालकों के विद्यालय को छोड़ने के पश्चात् होती है, जिसको हम लक्ष्य (Goal) भी कह सकते हैं। उद्देश्य की प्राप्ति में जिन छोटी-छोटी बातों को ध्यान में रखना पड़ता है, उन्हें 'प्राप्य उद्देश्य' (Objectives) कहते हैं। इस तरह से किसी एक विशेष उद्देश्य (Aim) के अन्तर्गत कई प्राप्य उद्देश्य आते हैं।

प्राप्य उद्देश्य (Objective) को तैयार करने में बहुत होशियारी रखनी पड़ती है, क्योंकि किसी उद्देश्य की पूर्ति तभी सम्भव है, जब उसके अन्तर्गत तैयार प्राप्य उद्देश्यों की तैयारी सही रूप से की गयी हो। इनके मुख्य दो कार्य हैं—

(1) इनके द्वारा किसी उद्देश्य की पूर्ति होती है।

(2) इनके आधार पर पाठ्य-वस्तु से प्रश्न तैयार करके बालकों को कार्य-विधि का ज्ञान होता है। इसका मतलब यह है कि एक विशेष उद्देश्य (Aim) की पूर्ति प्राप्य उद्देश्यों (Objectives) पर कार्य करने से पाठ्य-वस्तु के आधार पर प्राप्य उद्देश्यों की परीक्षा हेतु प्रश्न तैयार कर विद्यार्थियों के व्यवहार की परीक्षा की जाती है। उदाहरण के लिए, यह कह सकते हैं—यदि किसी प्रश्न के हल करने में बालकों की किसी योग्यता की परीक्षा नहीं होती है तो इस प्रकार के प्रश्नों से किसी उद्देश्य की प्राप्ति नहीं हो सकती है। माना, कक्षा में अध्यापक गणित के पाठ में बालकों को 'इकाई परिवर्तन' (Conversion of Units) का पाठ पढ़ा रहा है तो यदि दैनिक जीवन में बालक बाजार जाकर पुराने 1 रु० के सही नये पैसे नहीं ला सकता है तो हम यह कह सकते हैं कि उसको इकाई परिवर्तन का कोई ज्ञान नहीं हुआ, क्योंकि उसका व्यवहार वही रहा जो कि कक्षा में पढ़ने से पहले था। इनका वर्णन उद्देश्यों के बाद किया गया है।

अन्य विषयों की भाँति गणित को स्कूल में रखना निम्नांकित उद्देश्यों पर आधारित है—

(अ) सांस्कृतिक (Cultural) उपयोगिता,
(ब) अनुशासनिक (Disciplinary) उपयोगिता,
(स) व्यावहारिक (Utilitarian) उपयोगिता।

(अ) सांस्कृतिक (Cultural) उपयोगिता

गणित का एक मुख्य उद्देश्य सांस्कृतिक (Cultural) है। इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु गणित पढ़ने वाले विद्यार्थियों में कुछ सामान्य आदतों को बनाना होता है। इसका अभिप्राय यह है कि उक्त विषय को पढ़ने वाले बालकों में कुछ सामान्य आदतों का विकास हो जाता है। गणित ही एक ऐसा विषय है, जिसके अध्ययन से बालकों में तर्क-शक्ति (Reasoning Power) का विकास सबसे अधिक होता है। स्कूल में गणित पढ़ाने का मुख्य उद्देश्य बालकों की तर्क-शक्ति का विकास होना चाहिए, न कि केवल तथ्यों (Facts) को याद कराना। केवल गणित का एक अच्छा जानने वाला वही होता है जो कि दैनिक जीवन में उसके सिद्धान्तों का प्रयोग कर सके।

इसलिए गणित पढ़ाने में तर्क-शक्ति के विकास का ध्यान रखना, सूचना प्राप्ति की अपेक्षा महत्त्वपूर्ण होता है। गणित पढ़ाने में विधि अधिक महत्त्वपूर्ण होती है। गणित में तर्क-शक्ति के विकास हेतु उसकी स्पष्टता, शुद्धता, परिणामों की वास्तविकता—मूलतः तर्क-शक्ति का परिणाम आवश्यक होते हैं।

इस तरह वही व्यक्ति कुशल तथा उसका सामान्य व्यवहार समाज के अनुकूल होता है, जिसका व्यवहार वस्तु के निरीक्षण और तर्क से सम्बन्धित हो। वह इस तरह स्कूल में शिक्षा समाप्त करने पर जब समाज का नागरिक बनता है तो उसके व्यवहार से स्पष्ट हो जाता है कि वह एक अच्छा नागरिक है या नहीं। स्कूल में इस तरह गणित की शिक्षा का एक मुख्य उद्देश्य सांस्कृतिक होता है।

(ब) अनुशासनिक (Disciplinary) उपयोगिता

इस उद्देश्य से हमारा अभिप्राय मानसिक अनुशासन (Mental Discipline) से है। गणित के पढ़ने से बालकों में अनुशासन की भावना उत्पन्न होती है। बहुत-से मनोवैज्ञानिकों का कहना है कि गणित से जिस तर्क-शक्ति (Reasoning-power) का विकास होता है, उसका क्षेत्र गणित सम्बन्धी समस्याओं तक ही सीमित है। परन्तु यह बात असत्य सिद्ध हो चुकी है, क्योंकि किसी भी विषय में सीखी बातों तथा सिद्धान्तों का प्रयोग सदैव जीवन में होता रहता है। इसकी पुष्टि स्थानान्तर (Transfer of Training) से होती है। वे विद्यार्थी जो कि एक साधारण कोटि के थे, गणित अभ्यास से एक बुद्धिमान तथा चतुर विद्यार्थी बन गए हैं। यह इस बात का प्रमाण देता है कि गणित विषय से बालक में किस प्रकार अनुशासन (Discipline) पैदा हो जाता है। इसके अतिरिक्त इस तरह का ज्ञान उसको अन्य विषयों में सहायता प्रदान करता है।

इस तरह विद्यार्थी अपने दिन-प्रतिदिन के जीवन में एक आवश्यक व्यवहार करता है तथा उसमें अनुशासन की भावना जाग्रत हो जाती है।

(स) व्यावहारिक (Utilitarian) उपयोगिता

उपर्युक्त के अतिरिक्त गणित का व्यावहारिक (Utilitarian) उद्देश्य बहुत महत्त्वपूर्ण है। हमारी आधुनिक सभ्यता का आधार भी गणित ही है। आधुनिक युग विज्ञान का युग है। विज्ञान की खोजों के कारण हमारे जीवन पर बड़ा प्रभाव पड़ा है। इन खोजों के पीछे गणित के सिद्धान्त हैं। बिना गणित के विज्ञान की खोजों में सफलता मिलना असम्भव है। प्रत्येक व्यावहारिक कार्य में जैसे नापने, तोलने आदि का बोध गणित के ज्ञान द्वारा ही सम्भव है। इस तरह विज्ञान के अतिरिक्त अन्य विषयों में गणित का प्रमुख हाथ होता है।

हम दैनिक जीवन में मकान बनवाते हैं, कपड़े बनवाते हैं, जूते पहनते हैं। इन सभी कार्यों में गणित का ज्ञान आवश्यक है। एक अनपढ किसान भी यह जानता है कि एक एकड़ भूमि में कितनी खाद पड़ेगी, कितना बीज डाला जायेगा और कितनी उपज होगी। किसान हो या मजदूर, व्यापारी हो या डाक्टर, वकील हो या इंजीनियर, शिक्षक हो या पुजारी, सभी प्रतिदिन गणित के अंकों एवं सिद्धान्तों का प्रयोग करते हैं। एक मजदूर भी अपनी मजदूरी गिनना जानता है। एक रसोइया भी दाल-सब्जी में नमक-मसाले के अनुपात को जानता है। इस प्रकार प्रत्येक व्यक्ति जीवन में किसी न किसी रूप में गणित का प्रयोग अवश्य करता है।

इस हेतु विद्यालयों का यह कर्त्तव्य होना चाहिए कि वे बालकों में इस तरह की भावनाओं को जाग्रत करें, जिससे बालक अपने समय का सदुपयोग कर सकें। इस तरह से बालक अपने अवकाश का अच्छा उपयोग भी कर लेगा तथा गणित के सिद्धान्तों को भी समझ सकेगा।

गणित प्रत्येक व्यक्ति के लिए महत्त्वपूर्ण विषय है। एक व्यापारी को गणित का ज्ञान होना आवश्यक है वरना वह अपने व्यवसाय में कुशलता प्राप्त नहीं कर सकता। इसी तरह इंजीनियर, कारीगर आदि सभी लोगों को गणित का ज्ञान होना आवश्यक होता है। प्रत्येक व्यक्ति को बाजार में वस्तुओं को खरीदना तथा बेचना पड़ता है। यदि उसको गिनने का ज्ञान न होगा तो वह कुछ कार्य नहीं कर सकता है। उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाता है कि विद्यालय तथा उसके बाहर दोनों स्थानों में गणित का ज्ञान होना परम आवश्यक है। इस प्रकार से इस बात का सही ज्ञान होता है कि स्कूल में अन्य विषयों के समान गणित का व्यावहारिक उद्देश्य (Utilitarian Aim) भी होता है।

गणित पढ़ाने के प्राप्य उद्देश्य
(OBJECTIVES OF TEACHING MATHEMATICS)

जैसा कि ऊपर लिखा जा चुका है, प्रत्येक उद्देश्य (Aim) के प्राप्त करने में बहुत से प्राप्य उद्देश्यों की आवश्यकता होती है। यह इस बात को स्पष्ट करती है कि प्रत्येक उद्देश्य (Aim) के अन्तर्गत बहुत-से प्राप्य उद्देश्य (Objectives) आते हैं। इस तरह अध्यापक को किसी विशेष उद्देश्य (Aim) हेतु कुछ प्राप्य उद्देश्य (Objectives) को ध्यान में रखना होता है। इस तरह कक्षा में किसी उपविषय (Topic) को पढ़ाते समय अध्यापक को एक प्राप्य उद्देश्य (Objective) सम्मुख रखना पड़ता है। प्रत्येक प्राप्य

उद्देश्य (Objective) की परीक्षा के लिए हमको पाठ्य-वस्तु का बालक के व्यवहार में परिवर्तन को ध्यान में रखना होता है। इसी तरह कोई एक विषय में प्राप्य उद्देश्य (Objective) की परीक्षा के लिए विद्यार्थी को उसकी पुस्तक में से कुछ प्रश्न दिये जाते हैं। इन प्रश्नों के प्राप्त उत्तरों के विश्लेषण से यह बात स्पष्ट हो जाती है कि जिन प्राप्य उद्देश्यों के आधार पर अध्ययन किया गया था, उनकी पूर्ति किस सीमा तक हुई है। इस तरह की परीक्षा दोनों में, यानी 'लिखित' (Written) और 'मौखिक' (Oral) रूप से की जा सकती है। लिखित रूप में प्रश्नों के प्राप्त उत्तरों से वह परीक्षा की जाती है तथा मौखिक रूप से वह विद्यार्थी के किसी भी वातावरण में उसके व्यवहार द्वारा की जा सकती है। उदाहरण के रूप में यह इस प्रकार रखा जा सकता है कि एक बालक को प्रश्न-पत्र देकर उसके दिये गये उत्तरों की जाँच करके यह स्पष्ट हो जाता है कि बालक उस उद्देश्य को किस सीमा तक समझ सका है। यह रही लिखित रूप की परीक्षा। मौखिक रूप में यदि अध्यापक का पाठ्य-उद्देश्य यह जानना होता है कि बालक को पुराने सिक्के तथा नवीन सिक्के का ज्ञान है तो उसको एक पुराना रुपया देकर कुछ वस्तुएँ खरीद कर लाने को कहेगा। यदि बालक खरीद कर ठीक पैसे वापस लाता है तो यह कहा जा सकता है कि उसके व्यवहार में परिवर्तन हो गया है और वह इकाई या सिक्के के परिवर्तन को ठीक से समझ गया है। इस व्यवहार परिवर्तन से यह स्पष्ट हो जाता है कि अमुक प्राप्य उद्देश्य की पूर्ति हो गई है या नहीं।

उपर्युक्त वर्णन से यह स्पष्ट हो जाता है कि किसी प्राप्य उद्देश्य (Objective) की परीक्षा करने के लिए पाठ्य-वस्तु, प्रश्न, व्यवहार परिवर्तन तथा आवश्यक वस्तुएँ (Material Aids) आवश्यक होती हैं। आगे कुछ उदाहरणों से उपर्युक्त वर्णन की पुष्टि हो जायेगी।

(क) प्राप्य उद्देश्य (Objective)—बालक को इकाई का ज्ञान है तथा वह उसको दैनिक जीवन में प्रयोग में ला सकता है। वस्तु (Content) इकाई तथा उनका बदलना (Conversion), सामग्री (रस्सी, हड्डी आदि)।

क्रियाएँ (Activities)—अध्यापक विद्यार्थी से किसी स्थान को नापने को कहेगा तथा उस नाप का भिन्न-भिन्न इकाइयों में उत्तर देने को कहेगा।

व्यवहार परिवर्तन (Behaviour Pattern)

विद्यार्थी अपनी आवश्यकता हेतु लम्बाई, दूरी आदि को सही रूप में नापकर भिन्न-भिन्न इकाइयों में रख सकता है।

आगे गणित के कुछ प्राप्य उद्देश्यों (Objectives) की सूची व्यवहार परिवर्तन (Behaviour pattern) के साथ दी गयी है, जिससे प्राप्य उद्देश्य (Objectives) का सही ज्ञान हो सकता है।

(ख) प्राप्य उद्देश्य (Objective)—बालकों में पाठ्य-वस्तु को दैनिक जीवन में प्रयोग करने की क्षमता का विकास करना (To develop capacity of utilising the subject in day to day life)।

व्यवहार परिवर्तन (Behaviour Pattern)

(1) बालक सही रूप में लम्बाई, भार तथा क्षमता (Capacity) को माप सकता है।

(2) बालक एक ही प्रकार की वस्तुओं तथा भिन्न-भिन्न प्रकार की वस्तुओं के मूल्य की तुलना कर सकता है। वह सही रूप मे धन उधार ले तथा दे सकता है।

(3) बालक गणित-सम्बन्धी हल सही रूप में कर सकता है।

(4) वह किसी समस्या को हल करने के लिए आवश्यक सूचना (Information) इकट्ठी कर सकता है।

(5) वह किसी समस्या के हल करने में आवश्यक और अनावश्यक सूचना में अन्तर समझता है।

(ग) प्राप्य उद्देश्य (Objective)—बालकों में समस्या के सही विश्लेषण की क्षमता का विकास करना (To develop the capacity for analysing a problem)।

व्यवहार परिवर्तन (Behaviour Pattern)

(1) वह समस्या को समझता है।

(2) वह यह जानता है कि समस्या में क्या दिया गया है और क्या ज्ञात करना है।

(3) वह पदों (Steps) से होकर किसी निष्कर्ष पर पहुँचता है।

(4) वह उससे प्राप्त सिद्धान्त को आवश्यक स्थानों पर प्रयोग में ला सकता है।

गणित के प्राप्य उद्देश्य तथा उनका स्पष्टीकरण (OBJECTIVES OF MATHEMATICS AND THEIR SPECIFICATIONS)

कक्षा में गणित पढ़ने हेतु निम्न उद्देश्यों को ध्यान में रखा जाता है। प्रत्येक उद्देश्य के साथ-साथ उनके स्पष्टीकरण भी दिये गये हैं। उद्देश्यों को व्यावहारिक रूप में लिखा गया है।

(क) ज्ञान उद्देश्य (Knowledge Objective) —छात्र गणित के पद (Terms), प्रत्यय (Concepts), संकेत (Symbol), परिभाषा (Definition), सिद्धान्त (Principle), सूत्र (Formula) आदि का ज्ञान (Knowledge) प्राप्त करते हैं।

स्पष्टीकरण (Specifications)

(1) प्रत्यास्मरण (Recall) करते हैं।

(2) पहचानते हैं (Recognise)।

प्रत्यास्मरण (Recall) में छात्र प्रश्न पढ़कर या सुनकर उसका सीधा उत्तर या तो मन में लाते हैं या उसको लिखते तथा बोलते हैं। सामान्य रूप से इसमें एक विशिष्ट (Specific) प्रकार के पद, सिद्धान्त आदि का प्रयोग होता है।

पहचानना (Recognition)—इसकी क्रिया कुछ उच्च कोटि की होती है तथा इसमें छात्र एक समूह से उपयुक्त पद, प्रत्यय, तथ्य आदि को पहचानते हैं जो कि उनके गुणों पर आधारित होता है।

(ख) सही समझना या बोध होना (Understanding Objective)—छात्र गणित के पद (Terms), प्रत्यय (Concepts), संकेत (Symbol), सूत्र (Formula), परिभाषा (Definition), प्रक्रिया (Process), सिद्धान्त (Principle) आदि को सही समझ (Understand) सकते हैं या इनका बोध होता है।

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र—

(1) उदाहरण दे सकते हैं (Give illustrations)।

(2) त्रुटि का पता लगाकर सही कर सकते हैं (Detect errors and correct them)।

(3) तुलना कर सकते हैं (Compare)।

(4) सम्बन्धी प्रत्ययों की भिन्नता बता सकते हैं (Discriminate closely related concepts)।

(5) वर्गीकरण कर सकते हैं (Classify)।

(6) दिये गये आँकड़ों में सम्बन्ध पहचान सकते हैं (Identify relationships among given data)।

(7) शाब्दिक कथनों को संकेतात्मक कथनों में अनुवाद कर सकते हैं (Translate verbal statements into symbolical statements)।

(8) परिणामों की गणना कर सकते हैं (Estimate the results)।

(9) व्याख्या कर सकते हैं (Interpret)।

(10) प्रमाणित कर सकते हैं (Verify)।

उपर्युक्त प्राप्य-उद्देश्य (Objective) के स्पष्टीकरण को देखने से ज्ञात होता है कि इनमें छात्रों की मानसिक क्रिया उच्च कोटि की होती है, जिसके कारण उनका ज्ञान अधिक स्थायी होता है तथा उसका क्षेत्र बढ़ जाता है।

(ग) अनुप्रयोग उद्देश्य (Application Objective)—छात्र गणित का ज्ञान तथा पहचान का नवीन समस्याओं में अनुप्रयोग करते हैं। (Students apply their knowledge and understanding of Mathematics to new problems)।

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र—

(1) विश्लेषण करके ज्ञात करते हैं कि क्या दिया है और क्या आवश्यक है (Analyse and find out what is given and what is required)?

(2) दिये गये आँकड़ों की आवश्यकता, अनावश्यकता तथा पर्याप्तता ज्ञात करते हैं (Find out the adequacy, superfluity or relevancy of data)।

(3) आँकड़ों में सम्बन्ध स्थापित करते हैं (Establish relationship among data)।

(4) किसी समस्या को हल करने हेतु उपयुक्त विधि छाँटते हैं (Select the appropriate method for solution of problem)।

(5) विकल्प विधियाँ बताते हैं (Suggest alternate methods)।

(6) सामान्य-अनुमान कर सकते हैं (Generalize)।

(7) निष्कर्ष निकालते हैं (Draws inference)।

(घ) चातुर्य प्राप्य उद्देश्य (Skill Objective)–

छात्र चातुर्य प्राप्य करते हैं–

(1) गणना (Computation)।

(2) ज्यामिति चित्र तथा लेखाचित्र खींचना (Drawing geometrical figures and graphs)।

(3) तालिका, चार्ट तथा लेखाचित्र पढ़ना (Reading tables, charts and graphs etc.)।

स्पष्टीकरण (Specification)

छात्र–

(1) मौखिक हल शीघ्रता तथा आसानी से कर सकते हैं (Carry out oral calculations with ease and speed)।

(2) लिखित हल शीघ्रता तथा सरलता से कर सकते हैं (Carry out written calculations with ease and speed)।

(3) **ज्यामिति चित्र तथा लेखाचित्र खींचना** (Drawing geometrical figures and graphs)–

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र–

(1) ज्यामिति उपकरणों को सरलता तथा सुगमता से प्रयोग कर सकते हैं (Handle geometrical instruments with ease and proficiency)।

(2) शुद्धता से माप सकते हैं (Measure accurately)।

(3) बिना यन्त्र के आसानी से तैयार करते हैं (Draw freehand figures with ease)।

(4) दिये गये माप के बराबर चित्र खींच सकते हैं। (Draw figures to specifications or to scale)।

(5) शुद्ध चित्र खींच सकते हैं (Draw figures accurately)।

(6) **तालिका, चार्ट तथा ग्राफ को पढ़ना** (Reading tables, charts and graphs)

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र–

(1) तालिका को शीघ्रता तथा शुद्धता से पढ़ सकता है (Reads tables with speed and accuracy)।

(2) ग्राफ की व्याख्या करता है (Interprets graphs)।

(ङ) छात्र दैनिक जीवन में गणित की प्रशंसा कर सकता है। (The students appreciates the role of mathematics in day to day life)–

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र–

(1) विज्ञान की भिन्न-भिन्न शाखाओं में प्रयोग समस्याओं में गणित के उपयोग

की प्रशंसा करता है (Appreciates the role of mathematics in solving problems of other branches of science)।

(2) चित्रों तथा प्रयोजनों की समरूपता प्रशंसा करता है (Appreciates the symmetry of figures and designs)।

(3) गणित के अध्ययन द्वारा संक्षेप में व्यक्त करने तथा यथार्थता जैसे गुणों के विकास की प्रशंसा करता है (Appreciates the development of qualities like brevity and exactness through the study of mathematics)।

(च) छात्र गणित के प्रति रुचि विकसित करता है (The pupil develops interest in mathematics)–

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र–

(1) गणित के ग्रन्थों का अध्ययन करता है (Reads literature of mathematics)।

(2) गणित के उपविषय में लेख लिख सकता है (Writes article on mathematical topics)।

(3) गणित-सम्बन्धी पहेली हल करता है (Solves mathematical puzzles)।

(4) गणित परिषद् के कार्यों में भाग लेता है (Participates in the activities of mathematics club)।

(5) समस्याओं को हल करने की सरल विधि प्रस्तुत कर सकता है (Gives short-cuts for solving problems)

(छ) छात्र गणित के अध्ययन में धनात्मक अभिवृत्ति प्राप्त कर सकता है (The pupil acquires positive attitude towards mathematics)–

स्पष्टीकरण (Specifications)

छात्र–

(1) अपने गणित के अध्यापक को पसन्द करता है (Likes his mathematics teacher)।

(2) गणित में परीक्षा देना चाहता है (Likes to take test in mathematics)।

(3) गणित परिषद् के कार्यों को विद्यालय में विकसित करता है (Promotes the activities of mathematics club in the school)।

(4) गणित के अन्य छात्रों के साथ रहना पसन्द करता है (Likes to live in the company of other students of mathematics)।

(5) गणित में कमजोर छात्रों की सहायता करता है (Helps students who are weak in mathematics)।

(6) तार्किक चिन्तन का विकास करता है (Develpos thinking)।

(7) त्रुटियों मानता है (Accepts errors)।

माध्यमिक विद्यालय में गणित-सम्बन्धी स्पष्टीकरण की तालिका
(TABLE OF SPECIFICATION FOR SCHOOL MATHEMATICS)

ज्ञानात्मक (Cognitive)

पाठ्य-वस्तु (Content)	परिकलन (Computation)	ज्ञान (Comprehension)	अनुप्रयोग (Application)	विश्लेषण (Analysis)
1. **अंकगणित**—पूर्ण संख्या	1. विशिष्ट तथ्यों (Specific facts) का ज्ञान	1. प्रत्ययों (Concepts) का ज्ञान	1. दैनिक जीवन में उपयोगी प्रश्नों को हल करने की योग्यता	1. Non-routine problems को हल करने की योग्यता
2. **बीजगणित**— बीजगणित के पद, सम्बन्ध तथा कार्य	2. पारिभाषिक शब्दों (Terminology) का ज्ञान	2. सिद्धान्त, नियम तथा व्यापकीकरण (Generalization) का ज्ञान	2. तुलना करने की योग्यता	2. सम्बन्ध खोजने की योग्यता
3. **ज्यामिति**—मापन, ज्यामिति घटना (Geometric (Phenomenon)	3. कलन विधि (Algorithm) की योग्यता	3. गणितीय संगठन (Mathematical structure) का ज्ञान	3. आँकड़ों के विश्लेषण करने की योग्यता	3. उत्पत्ति देने की योग्यता
		4. रूपान्तरण में भाग लेने वाले अवयवों (Transforming elements) का ज्ञान	4. Patterns, Isomorphism तथा Symmetries के पहचानने की योग्यता	4. उपपत्तियों की आलोचना करने की योग्यता
		5. तर्क समझने की योग्यता (Ability to follow reasoning)		5. सूत्र बनाने एवं व्यापकीकरण की योग्यता
		6. किसी प्रश्न को पढ़ने तथा उसकी व्याख्या करने की योग्यता		

प्रभाव क्षेत्र
(AFFECTIVE DOMAIN)

पाठ्य-वस्तु (Content)	रुचि एवं अभिरुचि (Interest and Attitude)	प्रशंसा (Appreciation)
	(a) अभिवृत्ति (Attitude)	(a) बाह्य (Extrinsic)
	(b) रुचि (Interest)	(b) आन्तरिक (Intrinsic)
	(c) प्रेरणा (Motivation)	(c) प्रयोजक (Operational)
	(d) चिन्ता (Anxiety)	
	(e) आत्म-प्रत्यय (Self-Concept)	

■■

4

गणित में मूल्यांकन तथा शिक्षण-बिन्दु

[EVALUATION IN MATHEMATICS AND TEACHING POINTS]

गणित में मूल्यांकन (Evaluation) की विधि का वर्णन करने से पहले मूल्यांकन (Evaluation) का सामान्य वर्णन करना आवश्यक प्रतीत होता है।

मूल्यांकन विधि का मुख्य आधार यह है कि उपयुक्त सीखने के अनुभवों (Appropriate Learning Experiences) को बालक के सम्मुख प्रस्तुत करने पर उसके व्यवहार में आवश्यक परिवर्तन हो। इसके अतिरिक्त शिक्षा में परिवर्तन होने पर अध्यापन-विधियों तथा सीखने के तरीकों में भी परिवर्तन आवश्यक ही नहीं, बल्कि अनिवार्य भी है। इस प्रकार यह विधि निरन्तर (Continuous) चलती रहती है।

मूल्यांकन विधि द्वारा निम्न बातों का ज्ञान होता है (Evaluation is the process to determine the following)

(1) किसी विषय के प्राप्य उद्देश्यों (Objectives) की पूर्ति किस सीमा तक हो पायी है ?

(2) कक्षा में बालकों के सीखने के अनुभव (Learning Experiences) तथा उनका वास्तविक प्रभाव कहाँ तक हो पाया है ?

(3) विषय के लक्ष्य (Goals) की पूर्ति किस सीमा तक हो पायी है ?

उपर्युक्त से हमारे सम्मुख तीन बातें आती हैं। प्रथम है—प्राप्य उद्देश्य (Objective), जो कि लक्ष्य होता है, दूसरी है—सीखने के अनुभव (Learning Experiences), जो वास्तविक साधन (Means) हैं; तथा तीसरी है—स्वयं मूल्यांकन (Evaluation), जो कि प्राप्य उद्देश्यों की पूर्ति का ज्ञान देता है। ये तीनों एक-दूसरे से इस प्रकार सम्बन्धित हैं कि इनको अलग-अलग करना कठिन होता है तथा मूल्यांकन (Evaluation) में इन सब बातों को सम्मुख रखना पड़ता है। चित्र के रूप में इनका आपसी सम्बन्ध निम्न प्रकार दिखाया जा सकता है—

मूल्यांकन (Evaluation) करने में निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए

(1) बालकों में क्या और किस प्रकार के परिवर्तन हो रहे हैं ? बालकों के इन परिवर्तनों का ज्ञान तभी सम्भव है, जबकि उनकी प्रारम्भिक स्थिति का सही ज्ञान हो।

(2) बालकों के परिवर्तन जानने के लिए उपर्युक्त विधियों का प्रयोग करना चाहिए। यह ज्ञान बालक की दैनिक सूचना के आधार पर तैयार रिकार्ड पर निर्भर है।

(3) जो कुछ ज्ञान प्राप्त होता है, उससे बालकों में परिवर्तन कितना सुचारु रूप से हो पाया है, उसको भी ध्यान में रखा जाता है।

मूल्यांकन युक्तियाँ
(EVALUATION DEVICES)

एक अच्छी मूल्यांकन विधि वह है, जिसके द्वारा बालक के व्यवहार (Behaviour) में परिवर्तन का स्पष्ट ज्ञान हो सके। एक प्राप्य उद्देश्य (Objective) दूसरे से भिन्न होता है। प्रत्येक प्राप्य उद्देश्य की प्राप्ति से भिन्न-भिन्न व्यवहारों की सम्भावना होती है तथा एक मूल्यांकन युक्ति द्वारा सभी भिन्न-भिन्न व्यवहारों को मापने की सम्भावना नहीं होती है। प्रत्येक व्यवहार-परिवर्तन मापने हेतु एक विशेष प्रकार की युक्ति का प्रयोग करना आवश्यक होता है।

किसी भी उपकरण या विधि का प्रयोग करने में निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है—

(1) पाठ के प्राप्य उद्देश्य (Objectives of Teaching) क्या हैं ?

(2) उस प्राप्य उद्देश्य के लिए क्या उपयुक्त प्रमाण (Evidences) हैं ?

मूल्यांकन युक्तियों के प्रकार (Kinds of Evaluation Devices)

(क) **लिखित परीक्षाएँ** (Written Examinations)—ये परीक्षाएँ आजकल हमारे विद्यालयों में सामान्य रूप से प्रचलित हैं।

(ख) **मौखिक परीक्षाएँ** (Oral Examinations)—इसके द्वारा लिखित परीक्षाओं की पूर्ति होती है।

(ग) **प्रयोगात्मक परीक्षाएँ** (Practical Examinations)—इनका प्रयोग किसी विशेष दृष्टिकोण से विज्ञान, चित्रकला आदि विषयों में होता है।

(घ) **निरीक्षण** (Observation)—इसके द्वारा बालकों की संवेगात्मक (Emotional), सामाजिक (Social) तथा मानसिक (Mental) परिपक्वता का सही ज्ञान होता है।

(ङ) **साक्षात्कार** (Interview)—इसके द्वारा बालक की रुचि तथा अभिवृत्ति (Interest & Attitudes) का ज्ञान होता है।

(च) **प्रश्नावली** (Questionnaires)—प्रश्नों के प्राप्त उत्तरों से बालक द्वारा ज्ञात सूचनाओं का ज्ञान होता है। मुख्य रूप से उत्तर बालक की रुचि तथा अभिवृत्ति के सूचक हैं।

(छ) **छात्र द्वारा तैयार की गयी सामग्री** (Pupil's Products)—बालकों के व्यवहार का ज्ञान उसके द्वारा तैयार की गयी वस्तुओं के विश्लेषण द्वारा भी होता है।

(ज) रिकार्ड (Records)—बालकों की डायरी, उनके घर तथा विद्यालय की सूचनाओं द्वारा बालक का मूल्यांकन सम्भव होता है। बालकों की किसी विशेष परिस्थिति में प्रतिक्रिया भी बालक की अभिवृत्ति (Attitude) की जानकारी देती है।

उपर्युक्त युक्तियों (Devices) के प्रयोग हेतु अध्यापक को निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

(1) किसी भी युक्ति के प्रयोग में यह ध्यान रखा जाता है कि क्या साक्ष्य (Evidence) प्राप्त करनी है, जिससे बालक के बारे में सही ज्ञान हो सके।

(2) उपर्युक्त युक्तियों से प्राप्त की गयी सूचनाओं के साथ-ही-साथ साधारण रूप से बालक का ज्ञान भी प्राप्त किया जाता है। उस ज्ञान को भी ध्यान में रखना चाहिए।

(3) लिखित रूप से प्राप्त किया गया ज्ञान उतना लाभप्रद नहीं होता है, जितना कि सामान्य रूप से प्राप्त किया गया ज्ञान।

मूल्यांकन विधि
(EVALUATION PROCEDURE)

इस विधि में निम्न पद (Steps) एक निश्चित क्रम में आते हैं—

(क) शैक्षणिक प्राप्य उद्देश्यों को चुनना (Selections of the Educational Objectives)—सबसे प्रथम उन प्राप्य उद्देश्यों का चुनाव किया जाता है, जिनका कि मूल्यांकन करना हो।

(ख) प्राप्य उद्देश्यों का स्पष्टीकरण (Defining the Objectives)—इस पद में प्राप्य उद्देश्य हेतु बालक कैसा और क्या व्यवहार (Behaviour) करता है, उनको लिखा जाता है। व्यवहार हेतु स्थिति (Situation) विषय से ली जानी चाहिए।

(ग) स्थिति को पहचानना (Identifying the Situation)—प्राप्य उद्देश्य से सम्बन्धित व्यवहार की पूर्ति किस सीमा तक हुई है, इसका अनुभव उपयुक्त स्थिति पर निर्भर होता है। बालक के सम्मुख एक निश्चित स्थिति रखने पर उसके व्यवहार का ही ज्ञान सम्भव है।

(घ) परखों की जाँच तथा चुनाव (Examine and Choosing Tests)—ऐसी परखों तथा अन्य युक्तियों का चुनाव जो कि चुने हुए व्यवहार का ज्ञान प्रत्यक्ष (Direct) अथवा अप्रत्यक्ष (Indirect) रूप में दें। यदि उपलब्ध परख उपयुक्त न हों तो नवीन विधियों तथा युक्तियों का निर्माण अनिवार्य है।

(ङ) मूल्यांकन युक्तियों का निर्माण (Construction of the Evaluation Devices)—मूल्यांकन युक्ति तैयार करने में अध्यापक को ध्यान देना है कि—

(1) किस युक्ति द्वारा पढ़ाने से उद्देश्यों का मूल्यांकन सम्भव है।

(2) इस युक्ति द्वारा वास्तविक रूप में साक्ष्य (Evidence) मिलती है या नहीं।

(3) दो भिन्न-भिन्न व्यक्ति एक ही युक्ति का समान स्थिति में प्रयोग करें तो समान परिणामों पर पहुँचते हैं।

(4) क्या उपर्युक्त युक्ति प्रयोग में लाने पर कोई कठिनाई तो नहीं आती है ?

(च) युक्ति का अनुप्रयोग तथा ब्यौरा (Applying the Device and Record the Evidence)—किसी भी युक्ति के अनुप्रयोग करने में बालक के व्यवहार का ब्यौरा रखा

जाता है। निरीक्षण करने में अध्यापक को बालक को भिन्न-भिन्न स्थितियों में रखकर उसके व्यवहार का ब्यौरा तैयार करना चाहिए।

(छ) प्राप्य ब्यौरे की व्याख्या (Interpretation of the Evidence Recorded)—प्राप्य ब्यौरे का विश्लेषण किया जाता है। इस विश्लेषण के आधार पर बालक के व्यवहार-परिवर्तन का ज्ञान होता है। इसकी जानकारी प्राप्य उद्देश्य को सम्मुख रखकर ही सम्भव है।

गणित का मूल्यांकन
(EVALUATION IN MATHEMATICS)

ऊपर दिये गये विवरण द्वारा पाठकगण मूल्यांकन (Evaluation) को सामान्य रूप से समझ सकते हैं। नीचे केवल एक ही विषय के मूल्यांकन का विशिष्ट रूप से वर्णन किया गया है।

गणित पढ़ाने के प्राप्य उद्देश्य (Objectives of Teaching Mathematics)

आधुनिक प्रचलित गणित के प्रश्न-पत्रों का विश्लेषण करने पर हम इस परिणाम पर पहुँचते हैं कि गणित के प्रश्न कुछ पद (Terms), प्रत्यय (Concepts), प्रक्रियाएँ (Processes) तथा चातुर्य (Skill) और योग्यता का ज्ञान परखते हैं, परन्तु कोई भी प्रश्न किसी विशिष्ट पद, प्रत्यय तथा प्रक्रिया का सही रूप से ज्ञान नहीं देता है। इसका कारण यह है कि अध्यापक या परीक्षक बिना किसी प्राप्य उद्देश्य को ध्यान में रखकर प्रश्न-पत्र तैयार करता है, इसके साथ-ही-साथ सम्पूर्ण पाठ्यक्रम को भी ध्यान में नहीं रखता है। बालक प्रश्न को हल करने में केवल यान्त्रिक (Mechanical) विधि का प्रयोग करते हैं। इस प्रकार के प्रश्न हल करने में बालकों के व्यवहार में कोई विशेष परिवर्तन भी नहीं हो पाता है।

नीचे बालकों को गणित पढ़ाने के कुछ प्राप्य उद्देश्यों की सूची दी गयी है—

(1) गणित के पद (Terms), प्रत्यय (Concepts) तथा प्रक्रियाओं (Processes) से अवगत कराना।

(2) दैनिक जीवन में गणित के प्रत्यय तथा प्रक्रियाओं का प्रयोग कराना।

(3) दैनिक जीवन में गणित के कार्यों को भली-भाँति समझना तथा प्रशंसा (Appreciate) करना।

(4) प्रश्न हल करने के चातुर्य का विकास करना।

(5) गणित में प्रयोग किये जाने वाले यन्त्रों को भली-भाँति प्रयोग करना।

(6) गणित के ज्ञान द्वारा सामान्य समस्याओं को हल करना।

(7) विश्लेषणात्मक सोचने की आदत डलवाना।

(8) मानचित्र, रेखाचित्र की सही रूप में व्याख्या (Interpret) करने की क्षमता पैदा करना।

(9) गणित में रुचि पैदा करना।

(10) गणित में नापने की इकाइयों का सही प्रयोग करना।

ऊपर गणित के कुछ प्राप्य उद्देश्यों की सूची दी गयी है। इसके अतिरिक्त गणित पढ़ाने के कई अन्य प्राप्य उद्देश्य हैं। उपर्युक्त में कुछ की परख सामान्य लिखित परीक्षाओं से सम्भव है, परन्तु कुछ ऐसे हैं, जिनकी परख लिखित परीक्षा द्वारा नहीं हो सकती है।

इस बात से यह परिणाम निकलता है कि हमको अपनी परीक्षा का स्वरूप बदलना पड़ेगा। इसको कैसे किया जाये, इसका विवरण आगे दिया गया है।

एक गणित के अध्यापक को प्राप्य उद्देश्य (Objectives) तैयार करने तथा उनकी उपयोगिता हेतु निम्न प्रतिकारक (Factors) ध्यान में रखने चाहिए—

(1) शिक्षा का लक्ष्य (Aim of Education)

(2) समाज तथा उसकी आवश्यकताएँ (Society and its Demands)

(3) बालक तथा उनकी आवश्यकताएँ (Students and their Needs)

(4) पाठ्य-वस्तु की प्रकृति (Nature of Subject-matter)

(5) सीखने की प्रक्रिया तथा नियम (Process and Laws of Learning)।

गणित के प्राप्य उद्देश्यों को निम्न भागों में विभाजित किया जाता है—

(1) ज्ञान (Knowledge)

(2) बोध (Understanding)

(3) चातुर्य (Skill)

(4) अनुप्रयोग (Application)

(5) प्रशंसा तथा रुचि (Appreciation and Interest)

(6) अभिवृत्ति (Attitude)

(7) व्यक्तित्व तथा चरित्र (Personality and Character)।

ऊपर दिये गये प्राप्य उद्देश्यों के भागों में सभी आवश्यक हैं और गणित अध्यापक को कक्षा में पढ़ाते समय इनको ध्यान में रखना चाहिए। परन्तु समय तथा सामग्री की कमी होने के कारण आरम्भ में अध्यापक को प्रथम तीन पर विशेष रूप से ध्यान देना चाहिए। इनके प्राप्त होने पर धीरे-धीरे अन्य प्राप्य उद्देश्यों के भागों को अपने पढ़ाने से प्राप्त कराने की कोशिश करनी चाहिए।

प्राप्य उद्देश्यों का स्पष्टीकरण
(SPECIFICATION OF OBJECTIVES)

ऊपर के कथन से यह बात स्पष्ट हो जाती है कि गणित पढ़ाने के कुछ प्राप्य उद्देश्य होते हैं। परन्तु इतना ही अध्यापक के लिए पर्याप्त नहीं है। यदि अध्यापक को अपना पाठ प्राप्य उद्देश्यों के आधार पर तैयार करना है तो उसको यह ध्यान में रखना चाहिए कि बालक कक्षा में कैसे सीखते हैं तथा कक्षा के कार्य द्वारा कैसे ज्ञात किया जाय कि बालक कुछ सीखे हैं तथा प्राप्य उद्देश्य किस सीमा तक पूरा हुआ है। इसके लिए अध्यापक को प्राप्य उद्देश्य की व्याख्या करना अनिवार्य है।

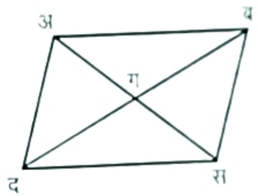
उदाहरण हेतु—हम एक प्राप्य उद्देश्य 'बालकों को क्षेत्रफल के प्रत्यय का ज्ञान देना है', ले लें तो अध्यापक को क्या करना है ? उसको यह ध्यान में रखना है कि किन-किन स्थितियों (Situations) में बालक का व्यवहार बताएगा कि उपर्युक्त प्राप्य उद्देश्यों की पूर्ति हो गयी है। यदि बालक क्षेत्रफल (Area) की सही परिभाषा बता दें तथा उससे सम्बन्धित प्रश्नों को हल कर दें तो इसका मतलब यह नहीं कि उनको क्षेत्रफल का सही प्रत्यय (Concept) ज्ञात है। यदि इस बालक को भिन्न-भिन्न स्थितियों

में जहाँ 'क्षेत्रफल' आता हो, ले जाया जाय तो वही बालक सही उत्तर नहीं दे सकता है. इसका क्या कारण हो सकता है ?

इसका मुख्य कारण यह है कि अध्यापक कक्षा में पढ़ाते समय बालक को केवल उसी स्थिति से अवगत कराता है जिसका वर्णन पुस्तक में है। वे यह ध्यान में नहीं लाते कि ज्ञान प्राप्त करने के और कौन-कौनसे साधन सम्भव हो सकते हैं तथा और कौन-कौन-सी स्थितियाँ बालक के जीवन में आ सकती हैं जिनका सम्बन्ध उस पाठ्य-वस्तु से है। इसके लिए प्राप्य उद्देश्यों को बालकों के सम्भव उत्तरों (Expected Responses) में विभाजित करना चाहिए, ताकि प्राप्य उद्देश्य पूर्ति की सूचना हो जाय। इससे भिन्न-भिन्न प्रकार की स्थितियों (Situations) की प्राप्ति सरल हो जाती है। इसकी पुष्टि निम्न उदाहरण से हो सकती है—

गणित पढ़ाने का एक प्राप्य उद्देश्य है—बालक की तर्क-शक्ति का बढ़ाना। यदि हम इस बात से सहमत हों कि उपर्युक्त प्राप्य उद्देश्य की पहचान बालक में तर्कात्मक अनुमान (Logical Deduction) की योग्यता पैदा होना है तो हम स्थितियों को तैयार कर सकते हैं।

नीचे तर्क में एक गलती के कारण निष्कर्ष गलत हो जाता है। एक समान्तर चतुर्भुज है, जिसमें दोनों कर्ण बराबर होते हैं। नीचे तर्क में जो गलत हो, उन पर × चिन्ह लगा दो—



Δ अ ग द और Δ ब ग स में

अ द = ब स

∠ द अ ग = ∠ द स ब

∠ अ द ग = ∠ ग ब स

दोनों त्रिभुज अनुरूप हुए।

इसलिए अ ग = ग ब

चूँकि समान्तर चतुर्भुज के कर्ण एक-दूसरे को बराबर भागों में बाँटते हैं।

इसलिए अ ग = $\frac{1}{2}$ अ स और ग ब = $\frac{1}{2}$ ब द

∴ अ स = ब द

उपर्युक्त उदाहरण अध्यापक को सीखने के अनुभव (Learning Experience) तैयार करने में सहायता देता है। प्राप्य उद्देश्य की व्याख्या करने में हमारे सम्मुख उन दो बालकों की प्रतिमा आती है, जिनमें एक का व्यवहार दूसरे से भिन्न होता है। जो बालक किसी प्रत्यय (Concept) को समझता है वह एक विशेष प्रकार का व्यवहार करता है। इस व्यवहार द्वारा हम यह समझ सकते हैं कि हमारा प्राप्य उद्देश्य पूरा हुआ या नहीं।

ज्ञान तथा समझना प्राप्य उद्देश्यों में बालक निम्न व्यवहार प्रकट करेगा—

(1) बालक प्रत्यय (Concept), पद (Terms) आदि को उदाहरणों में पहचान सकता है।

(2) बालक प्रत्यय, पद आदि के उदाहरण दे सकता है।

(3) बालक दो प्रत्यय, प्रतिक्रियाओं तथा सिद्धान्तों का, जो कि आपस में एक-दूसरे से मिलते-जुलते हैं, अन्तर समझा सकता है।

(4) वह पद, प्रत्यय तथा सिद्धान्त की परिभाषा दे सकता है।

(5) वह वर्णन तथा परिभाषाओं की गलती बता सकता है।

(6) वह गणित के पद, प्रत्यय तथा सिद्धान्तों की तुलना तथा अन्तर बता सकता है।

उपर्युक्त स्पष्टीकरण के आधार पर पढ़ाने की स्थितियों को पैदा किया जा सकता है। इनसे बालकों के विचारों में स्पष्टीकरण होता है।

उदाहरण के रूप में, एक दूसरा प्राप्य उद्देश्य ज्ञान प्रयोग (Application) करने का है। इसका स्पष्टीकरण (Specification) नीचे दिया गया है–

(1) बालक दिये गये आँकड़ों (Data) का विश्लेषण करके यह ज्ञात करता है कि क्या दिया गया है, और क्या ज्ञात करना है ?

(2) वह आवश्यक सामग्री को दिये हुए आँकड़ों (Data) में से छाँट सकता है।

(3) वह उपयुक्त विधि का प्रयोग कर सकता है।

(4) वह परिणाम की सत्यता का ज्ञान कर सकता है।

(5) वह प्रश्न को सही रूप में हल कर सकता है।

(6) वह दिये गये हल की व्याख्या कर सकता है।

गणित के अध्यापक को यह ज्ञात करने के लिए प्राप्य उद्देश्य की प्राप्ति हुई है या नहीं। इसके लिए दो बातें ध्यान में रखनी चाहिए–

(1) क्या बालक किसी समस्या को हल करने में आवश्यक विचार कर सकता है ?

(2) क्या वह उपर्युक्त क्रिया द्वारा समस्या का सही हल ज्ञात कर सकता है ?

उपर्युक्त कथन से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि प्राप्य उद्देश्यों के साथ-साथ अध्यापक को बालक के व्यवहार पर भी ध्यान रखना चाहिए। प्राप्य उद्देश्यों के स्पष्टीकरण (Specification) से पढ़ाने तथा परीक्षा लेने में सहायता मिलती है।

परीक्षा हेतु सामग्री तैयार करना
(DEVELOPING TEST MATERIAL)

मूल्यांकन विधि में प्राप्य उद्देश्य तैयार करने के पश्चात् उनका स्पष्टीकरण बालक के व्यवहार के रूप में किया जाता है। इसके पश्चात् पाठ्य-वस्तु सम्मुख रखकर प्रश्न तैयार किये जाते हैं। इन प्रश्नों के उत्तरों से यह ज्ञात होता है कि बालक के व्यवहार में क्या परिवर्तन हुआ है। यद्यपि विद्यालय में हम वे सभी स्थितियाँ (Situations) नहीं पाते हैं, फिर भी एक चतुर अध्यापक कुछ आवश्यक स्थितियाँ तैयार कर सकता है। कम-से-कम पाठ्यक्रम को ही ध्यान में रखने पर बालक का मूल्यांकन एक सीमा तक हो सकता है।

अब गणित-अध्यापक को एक परख तैयार करनी है। परख तैयार करने में उसको अग्रांकित प्रतिकारक ध्यान में रखने हैं–

(क) प्रश्नों का आधार प्राप्य उद्देश्य हो (Questions should be objective based)–प्रश्न तैयार करने मे अध्यापक के मस्तिष्क में यह बात अवश्य हो कि अमुक प्रश्न क्यो परख मे रखा जा रहा है और उससे वह बालको म क्या मापने जा रहा है। उदाहरण के रूप में एक प्रश्न नीचे दिया गया है–

प्रश्न–(1) यदि कमरे की लम्बाई 15′ तथा चौडाई 10′ है तो कमरे का क्षेत्रफल = 150 वर्ग फुट होता है।

(2) एक कमरे की लम्बाई 15′ और चौड़ाई 10′ है, उसके फर्श को पूरा करने के लिए 5″ × 5″ नाप की कितनी ईंटे चाहिए ?

उपर्युक्त प्रश्नो में एक अन्तर है। प्रथम प्रश्न द्वारा यह जाँच की जाती है कि बालक क्षेत्रफल की उपयुक्त इकाई (Unit) लिख सकता है। दूसरे प्रश्न द्वारा यह जॉच होती है कि बालक को क्षेत्रफल का प्रत्यय (Concept) ज्ञात है और वह समस्या को उस आधार पर हल कर सकता है। अध्यापक किसी भी प्रश्न को परख मे रख सकता है, परन्तु उसको रखने का उद्देश्य होना चाहिए।

(ख) प्रश्न की भाषा स्पष्ट तथा उपयुक्त शब्दों में हो (Question should be properly worded)–प्रश्न मे प्रयोग की गयी भाषा सरल तथा शब्द उपयुक्त हों, जिससे बालकों को भाषा की कठिनाई न हो। यदि प्रश्नो की भाषा ठीक है तो अंक प्रदान करना (Marking) भी सरल तथा उपयुक्त हो सकता है।

(ग) प्रश्नों द्वारा बालक को सही समझने (Understanding) **की परख होनी चाहिए, न कि स्मृति** (Memory) की–परीक्षा मे एक ही प्रश्न को बार-बार नहीं देना चाहिए। बालक के सही समझने (Understanding) की परख हेतु प्रश्न ऐसे हो जो कि प्राप्य उद्देश्य पर आधारित हों, परन्तु प्रश्न एक ही प्रकार के न हो। मुख्यतया पुस्तक के प्रश्न न पूछे जायें। प्रश्न या स्थिति नवीन हो तो परख ठीक सम्भव है।

(घ) परख के प्रश्न की कठिनाई का स्वरूप बालकों की योग्यता तथा स्तर के अनुकूल हो (Question should be appropriate level of difficulty)–प्रश्न न तो अधिक सरल हों, और न ही अधिक कठिन; परन्तु कक्षा के स्तर के अनुकूल हों। अध्यापक को ऐसे प्रश्न छाँटने चाहिए जिनको बालक हल कर सकें।

(ङ) परख में प्रश्न उपयुक्त रूप में रखे जायें (Questions in the test should be put in proper form)–सामान्य रूप से प्रश्न के दो रूप होते हैं। निबन्धात्मक (Essay Type) तथा दूसरा वस्तुनिष्ठ (Objective Type) रूप। प्रथम निबन्धात्मक के अन्तर्गत दो प्रकार के प्रश्न (1) लम्बे उत्तर वाले (Long Answer Type) और (2) छोटे उत्तर वाले (Short Answer Type) आते हैं। नीचे दोनो प्रकार के प्रश्न उदाहरण सहित दिये गये हैं–

प्राप्य उद्देश्य (Objective)–ज्ञान (Knowledge)

रूप (Form)–**निबन्धात्मक** (Essay Type)–लम्बे उत्तर वाला (Long Answer Type)।

(1) तुम्हारी मेज $2\frac{1}{2}' \times 3\frac{1}{2}'$ है। तुमको एक मेजपोश (Table Cloth) लेना है जो चारों ओर 6″ गिरा हो, उसका क्षेत्रफल (Area) बताओ जो उपर्युक्त मेज के लिए ठीक होगा।

व्यवहार (Behaviour)—बालक प्रश्न का मतलब समझता है तथा कार्यविधि समझता है।

रूप (Form)—छोटे उत्तर का हल (Short Answer Type)।

(2) मानचित्र द्वारा ज्ञात करो कि एक वर्ग मीटर एक वर्ग डेसीमीटर से कैसे सम्बन्धित है ?

व्यवहार (Behaviour)—बालक इससे सम्बन्धित भिन्न-भिन्न सम्बन्धों के उदाहरण दे सकता है।

रूप (Form)—वस्तुनिष्ठ प्रकार (Objective Type) अनेक चयन (Multiple Choice)।

(3) $\frac{1}{2-क}$ के समान है—केवल एक पर निशान लगाना है।

(अ) $\frac{1}{-(क-2)}$ (स) $\frac{+1}{(क-2)}$

(ब) $\frac{-1}{(क+2)}$ (द) किसी के समान नहीं है।

व्यवहार (Behaviour)—बालक समान रूप को पहचान सकता है।

रूप (Form)—वस्तुनिष्ठ प्रकार (Objective Type)—मेल परीक्षा (Matching Type)।

(4) नीचे दो स्तम्भ हैं। प्रथम में एक चतुर्भुज के कर्णों (Diagonals) के बारे में वर्णन है और दूसरे में उन चित्रों के नाम हैं। प्रत्येक वर्णन के बायीं ओर सही चित्र का नम्बर लिखना है—

(स्तम्भ 1)	(स्तम्भ 2)
(अ) कर्ण (Diagonals) बराबर होते हैं और एक-दूसरे को बराबर भागों में विभाजित (Bisects) करते हैं।	(1) समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)
(ब) कर्ण एक-दूसरे को बराबर भागों में विभाजित नहीं करते हैं।	(2) आयत (Rectangle)
(स) कर्ण बराबर नहीं होते हैं; परन्तु एक-दूसरे को बराबर भागों में विभाजित करते हैं।	(3) समबाहु चतुर्भुज (Rhombus)
(द) कर्ण एक-दूसरे को विभाजित करते हैं और एक-दूसरे पर समकोण बनाते हैं।	(4) वर्ग (Square)
(य) कर्ण आपस में बराबर हैं और आपस में समकोण पर एक-दूसरे को बराबर भागों में विभाजित करते हैं।	(5) सम्लम्ब चतुर्भुज (Trapezium)

व्यवहार (Behaviour)—बालक भिन्न-भिन्न चतुर्भुजों के गुणों को पहचान सकता है।

रूप (Form)—वस्तुनिष्ठ प्रकार (Objective Type)—सत्यासत्य प्रकार (True-False Type)।

प्रान्त States	**जनसंख्या** (लाख में) Population (in lakhs)	**साक्षर** (लाख में) Literate (in lakhs)
(अ)	60	3.0
(ब)	50	2.0
(स)	30	1.8

उपर्युक्त प्रश्न में नीचे दिये कथन यदि सत्य हों तो उन पर ✓ चिन्ह लगाना है—

(1) प्रान्त 'अ' में साक्षरता सबसे अधिक है, क्योंकि इसमें सबसे अधिक साक्षर हैं।

(2) प्रान्त 'ब' की साक्षरता सबसे कम है, क्योंकि सम्पूर्ण आबादी में साक्षरता का प्रतिशत सबसे कम है।

(3) प्रान्त 'स' की साक्षरता सबसे कम है, क्योंकि उस प्रान्त की आबादी सबसे कम है।

व्यवहार (Behaviour)—बालक पदों को समझता है तथा तथ्यों से साधारण निष्कर्ष निकाल सकता है।

रूप (Form)—निबन्धात्मक (Essay Type)—लम्बे उत्तर वाला प्रश्न (Long Answer Type)।

प्राप्य उद्देश्य (Objective) अनुप्रयोग (Application)

(1) एक वर्गाकार बगीचे की एक भुजा 15 फुट लम्बी है। यदि चार वर्ग क्यारी प्रत्येक 25 वर्ग फुट, बगीचे के चारों ओर कोने पर रखी जायें और दोनों के बीच में रास्ता एक-दूसरे को काटे तो—

(अ) रास्ता कितना चौड़ा हो सकता है ?

(ब) चित्र द्वारा रास्ते को दर्शाइये।

व्यवहार (Behaviour)—बालक को प्रश्न में क्या ज्ञात है तथा क्या ज्ञात करना है तथा उसके सम्बन्ध को समझ सकता है।

रूप (Form)—निबन्धात्मक (Essay Type)—छोटे उत्तर वाला प्रश्न (Short Answer Type)।

(2) किसी वृत्त (Circle) को काटने वाली जीवाएँ (Intersecting Chords) किन-किन दशाओं में एक-दूसरे को समद्विभाजित करती हैं।

व्यवहार (Behaviour)—बालक यह पहचानता है कि गुण तथा निष्कर्ष सत्य है।

रूप (Form)—वस्तुनिष्ठ रूप (Objective Type)—पूर्ति रूप (Completion Type)।

(3) नीचे प्रश्न में जो पद (Term) नहीं दिया गया है, उसकी पूर्ति कीजिए–

$$\frac{4\text{क}-5}{3} = \frac{-\text{क}+4}{2}$$

इसलिए 8 क......... = +.........12

व्यवहार (Behaviour)–बालक क्रियाओं (Processes) को सही रूप में कर सकता है।

(**नोट**–नवीन प्रश्नों के भिन्न-भिन्न रूप अध्याय 13 में दिये गये हैं।)

परख तैयार करना

(PLANNING OF A TEST)

आधुनिक युग में अभी तक परख या प्रश्न-पत्र तैयार करने में परीक्षक विशेष ध्यान नहीं देते हैं। परखों में भिन्न-भिन्न त्रुटियों (Mistakes) के कारण बालकों की सही परीक्षा नहीं हो पाती है। इसके अतिरिक्त अध्यापक अपनी पाठन-विधि में भी कोई परिवर्तन नहीं करते। यदि प्रश्न-पत्र तैयार करने में कुछ पदों (Steps) को ध्यान में रखा जाय तो हमारा गणित विषय का उद्देश्य एक सीमा तक प्राप्त हो सकता है। नीचे इन सभी पदों का संक्षेप में उल्लेख किया गया है–

(क) प्राप्य उद्देश्य की व्याख्या (Defining of Objective)–प्रत्येक परख को तैयार करने से पहले अध्यापक को प्राप्य उद्देश्य (Objective), जो कि परख द्वारा पूरे हों, उनकी सूची तैयार करनी चाहिए। प्राप्य उद्देश्य के सम्मुख उनका स्पष्टीकरण (Specification) बालक के व्यवहार के रूप में लिखा जाय। जितना अधिक-से-अधिक हो सके, उतने अधिक व्यवहार के रूप में हों। परख किसलिए प्रयोग होगी, इसी आधार पर प्रश्न तैयार किये जाते हैं।

(ख) पाठ्यक्रम की पूर्ति (Coverage of Syllabus)–दूसरा पद पाठ्यक्रम की सामग्री का होता है। प्रथम तो जो भी उप-विषय (Topics) परख में देते हैं, उनकी सूची तैयार की जाती है। फिर प्रत्येक उप-विषय (Topics) से पद (Terms), प्रत्यय (Concepts), सिद्धान्त (Principles) आदि छाँट लिये जाते हैं। इनको ध्यान में रखने पर पाठ्यक्रम की अधिक-से-अधिक पूर्ति हो सकती है।

PREPARING A TABLE OF SPECIFICATION

Topics → Objective ↓	**P. W. & Discount Terms**	**Profit & Loss**
1. Knowledge of the pupil		
(a) Recognises	Discount or True Discount Banker's Discount	
(b) Illustrates	Present Worth	
(c) Defines or decides	Days of grace. Discounting a bill nominally and legally due date.	
(d) Sees relationships	Hundi or Bill of Exchange.	
(e) Detects error		

(ग) प्राप्य उद्देश्यों तथा उप-विषयों (Topics) **को महत्त्व दिया जाय** (Determining Weightage to be given to Objectives and Topics)–प्राप्य उद्देश्यों तथा उप-विषयों को कितना महत्त्व दिया जाना चाहिए–यह तीसरा पद है इसको Weightage की समस्या कहते हैं। अध्यापक को यह निश्चय कर लेना चाहिए कि परख की कितनी लम्बाई हो, और तब प्राप्य उद्देश्यों को ध्यान में रखकर पाठ्य-वस्तु पर आधारित प्रश्नों का वितरण करें। परख की लम्बाई तीन बातों पर निर्भर करती है–

(1) कितनी विषय-वस्तु परख में हो ?

(2) परख के हल करने में कितना समय दिया जाय ?

कक्षा में एक घण्टे के लिए तैयार किया गया प्रश्न-पत्र तिमाही, छमाही तथा वार्षिक प्रश्न-पत्र से लम्बाई में छोटा होगा। इस तरह निबन्धात्मक प्रश्नों में वस्तुनिष्ठ (Objective Type) प्रश्नों को हल करने की अपेक्षा अधिक समय लगता है।

उदाहरण के रूप में, यदि अध्यापक 50 प्रश्न वस्तुनिष्ठ रखना चाहता है उसने अंकगणित (Arithmetic) क्षेत्र के तीन उप-विषय (Topics) पढ़ाये हैं और वह दो प्राप्य उद्देश्यों को ध्यान में रखता है तो वह निम्न रूप में प्रश्न-पत्र की रूपरेखा तैयार करेगा।

उप-विषय → प्राप्य उद्देश्य ↓	**1**	**2**	**3**	**योग**
1	10	5	5	20
2	15	7	8	30
योग	25	12	13	50

इसके पश्चात् अध्यापक यह भी ज्ञात कर सकता है कि प्रत्येक व्यवहार हेतु वह कितने प्रश्न दे रहा है। यह विधि प्रश्न-पत्र की विश्वसनीयता (Reliability) के दृष्टिकोण से महत्त्वपूर्ण है।

(घ) भिन्न-भिन्न रूपों के प्रश्नों का परख क्रम तथा संख्या (Number and Arrangement of Items of Various Forms)–प्रश्नों का रूप बालक के व्यवहार से सम्बन्धित होना चाहिए इससे प्रश्न-पत्र की वैधता (Validity) का ज्ञान होता है। प्रश्न-पत्र में प्रश्नों की संख्या कितनी होनी चाहिए, इसकी माप अग्रलिखित बातों से होती है–

(1) परख या प्रश्न-पत्र का समय (Duration of test)

(2) प्रश्नों की प्रकृति तथा उसका रूप (Form and Nature of Items)

परख में यदि दोनों रूप के प्रश्न रखने हों तो उनके लिये दो अलग-अलग बातों पर ध्यान देना चाहिए—

(1) एक रूप के प्रश्न एक खण्ड में रखे जायें, क्योंकि उनके लिए समान आदेश होता है।

(2) प्रश्न 'सरल से कठिन' रूप में रखे जायें।

(3) एक ही परख में सभी प्रकार के प्रश्नों का होना आवश्यक नहीं है, इसका अभिप्राय वस्तुनिष्ठ रूप (Objective) के भिन्न-भिन्न प्रकारों से है।

(ङ) प्रश्न की कठिनता (Item Difficulty)—अध्यापक को प्रश्न-पत्र तैयार करते समय अपनी कक्षा के स्तर को विशेष रूप से ध्यान में रखना चाहिए। दो-चार बार प्रश्न-पत्र तैयार करने के पश्चात् अध्यापक को प्रश्न-पत्र तैयार करने में सरलता हो जायेगी। यदि कक्षा में सभी बालकों के अंक उच्चकोटि के आते हैं तो उसको समझना चाहिए कि प्रश्न-पत्र कक्षा के स्तर से आसान है। प्रश्नों को परख में 'सरल से कठिन' रूप में रखना चाहिए।

परख तैयार करने के पश्चात् उसको बालकों को हल करने दिया जाता है। हल प्राप्त करने पर प्रश्न के उत्तरों का प्राप्य उद्देश्य तथा व्यवहार-परिवर्तन ध्यान में रखकर विश्लेषण तैयार किया जाता है और साथ ही अंक प्रदान किये जाते हैं। प्राप्य उद्देश्य की पूर्ति तभी समझी जाती है जब प्रश्न के उत्तर उनके स्वरूप से सम्बन्धित हों। यही गणित में मूल्यांकन (Evaluation) कहलाता है।

नीचे मूल्यांकन (Evaluation) हेतु एक इकाई परख (Unit Test) का Blue Print प्रस्तुत है। इस रूपरेखा को तैयार करने में समय, पूर्णांक, इकाई तथा कक्षा को ध्यान में रखा जाता है। इसके साथ-ही-साथ प्राप्य उद्देश्य (Objectives), प्रश्नों के प्रकार, पाठ्य-वस्तु, प्रश्नों की संख्या तथा अंकों को भी इस Blue Print में दिया जाता है। इसको तैयार करने पर अध्यापक के सम्मुख एक पूर्ण चित्र बन जाता है।

BLUE PRINT

इकाई—लाभ और हानि — **समय**—40 मिनट

कक्षा—9 — **पूर्णांक**—25

प्राप्य उद्देश्य	Knowledge			Understanding			Application			योग
प्रश्नों के प्रकार पाठ्य-वस्तु उप-इकाई	E	S	O	E	S	O	E	S	O	
1. लाभ-हानि का प्रतिशत		2 (1)	1 (1)			(2) (2)		2 (1)		8
2. विक्रय मूल्य		2 (1)	2 (2)	5 (1)					5 (2)	11
3. क्रय मूल्य		1 (1)	1 (1)		2 (1)				1 (1)	6
उप-योग		6 (3)	4 (4)	5 (1)	2 (1)	2 (2)		2 (1)	4 (4)	25
Sub-total										(16)
योग	10			9			6			25

नोट—कोष्ठक के अन्दर दिये गये अंक प्रश्नों की संख्या तथा कोष्ठकों के बाहर की संख्या अंकों की संख्या होती है।

सारांश— निबन्धात्मक प्रश्न (E) संख्या—1 अंक—5

छोटे उत्तर वाले प्रश्न (S) संख्या—5 अंक—10

वस्तुनिष्ठ प्रश्न (O) संख्या—10 अंक—10

Scheme of Option—Nil

Scheme of Section—Section A—Objective Type

Section B—Essay & Short Answer Type

(प्रश्न स्वयं तैयार करने हैं)

शिक्षण-बिन्दु
(TEACHING POINTS)

गणित पढ़ाने में शिक्षक को प्राप्य उद्देश्य अपने सम्मुख रखने पड़ते हैं, जैसाकि ऊपर कहा जा चुका है। परन्तु प्राप्य उद्देश्यों (Objectives) की पूर्ति हेतु पाठ्य-वस्तु की आवश्यकता होती है। पाठ्य-वस्तु में से शिक्षक को किन विशेष बातों का ध्यान रखना चाहिए, इसकी जानकारी अति आवश्यक है। इन्हीं बातों को शिक्षण बिन्दु (Teaching Points) कहते हैं।

गणित में एक ओर उप-विषय (Topic) लिखा जाता है तथा दूसरी ओर शिक्षण-बिन्दु। उप-विषय में से इन बिन्दुओं का चयन किया जाता है और इनकी संख्या ज्ञात की जाती है। इनकी संख्या तथा महत्त्व को ध्यान में रखकर पढ़ाने के समय को निश्चित किया जाता है। उसी के आधार पर प्रश्नों की संख्या तथा अंकों का मान निर्धारित किया जाता है। शिक्षक को इस प्रकार प्रत्येक पाठ में किन-किन बातों पर बल देना होता है इसका पूर्ण ज्ञान प्रारम्भ से ही स्पष्ट होता है। इस विधि में प्रारम्भ में अधिक समय लगता है परन्तु यह बड़ी ही लाभप्रद होती है। आगे शिक्षण-बिन्दु, उप-विषय, समय तथा अंकों के मान उदाहरण के रूप में दिये गये हैं। इन उदाहरणों से उपर्युक्त कथन की पुष्टि हो जाती है।

(क)

पढ़ाने के प्राप्य उद्देश्य (Objectives of Teaching)	शिक्षण-बिन्दु (Teaching Points)	Topic 1 लाभ-हानि	Topic-2 आयतन	Topic-3 क्षेत्रफल	Topic-4 समीकरण	प्रश्न संख्या
(अ) ज्ञान देना (Knowledge)	पद (Term) प्रत्यय (Concept) प्रक्रियाएँ (Processes) सिद्धान्त (Principle) संकेत (Symbol) कल्पना (Assumption) सम्बन्ध (Relationship)					
(ब) बोध (Understanding)						
(स) चातुर्य विकसित करना (Development of Skill)						
(द) अनुप्रयोग (Application)						

(ख) प्राप्य उद्देश्य (Objective)—ज्ञान देना (Development of Knowledge)

Topic → शिक्षण-बिन्दु (Teaching Points) ↓	ब्याज	लाभ-हानि (Profit & Loss)
पद (Terms)	ब्याज, मूलधन, मिश्रधन, समय, दर	क्रय, विक्रय, मूल्य, लाभ, हानि, नकद, उधार।
प्रत्यय (Concepts)	धन का किराया ब्याज	व्यक्ति व्यापार में एक-दूसरे पर आधारित हैं।
प्रक्रियाएँ (Processes)	ऐकिक नियम और सूत्र द्वारा	क्रय-विक्रय मूल्य तथा लाभ हानि ज्ञात करना।
सिद्धान्त (Principle)	ब्याज = $\frac{\text{मू.} \times \text{सं.} \times \text{दर}}{100}$	—
संकेत (Symbols)	—	—
कल्पना (Assumption)	मिश्रधन मूलधन से अधिक होता है।	प्रत्येक वस्तु समान रखी जाती है।
सम्बन्ध (Relationship)	मिश्रधन = मूलधन + ब्याज।	वि. मू. – क्र. मू. = लाभ क्र. मू. – वि. मू. = हानि

(ग) Topic—लाभ-हानि (Profit & Loss)
(केवल ज्ञान प्राप्य उद्देश्य के लिए) **पूर्णांक—8**

शिक्षण-बिन्दु (Teaching Points)	अंक मान (Marks)	समय (Duration)
पद—क्रय, विक्रय, लाभ, हानि, नकद, उधार आदि।	$1\frac{1}{2}$	40 मिनट
प्रत्यय—व्यक्ति व्यापार में एक-दूसरे पर आधारित हैं।	1	10 मिनट
प्रक्रियाएँ—क्रय तथा विक्रय मूल्य तथा लाभ-हानि ज्ञात करना।	$2\frac{1}{2}$	80 मिनट
कल्पना—प्रत्येक वस्तु समान रखी जाती है।	$\frac{1}{2}$	10 मिनट
सम्बन्ध—क्र. मूल्य, वि. मूल्य तथा लाभ-हानि में सम्बन्ध	$2\frac{1}{2}$	40 मिनट

प्राप्य उद्देश्य (Objectives)	शिक्षण-बिन्दु (Teaching Points)	कक्षा-कार्य (Class Activities)
ज्ञान देना (Development of Knowledge)	पद– प्रत्यय– प्रक्रियाएँ– कल्पना– सम्बन्ध–	(1) कक्षा में मौखिक तथा लिखित रूप में जीवन से सम्बन्धित परिस्थितियाँ प्रस्तुत करना। (2) पदों का परिचय। (3) परिस्थितियों से अवगत कराना। (4) साधारण प्रश्न। (5) प्रश्नों को हल करना। (6) अभ्यास-कार्य। (7) गृह-कार्य।

(1) विशिष्ट तथ्यों का ज्ञान

1. निम्नलिखित में से कौन-सी संख्या पूर्णांक नहीं है ?

(a) 0 (b) 3

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

2. 5 का गुणन प्रतिलोम (Multiple of inverse) है–

(a) – 5 (b) –1/5

(c) 1/5 (d) 5

(e) मालूम नहीं

3. $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ का addition alogorithm rational number है–

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=$ ....

4. दो समान्तर रेखाओं के समीकरण लिखिए।

....

(2) पारिभाषिक शब्दों (Terminology) का ज्ञान

1. जिस समुच्चय (Set) में कोई अवयव (element) न हो उसे............समुच्चय कहते हैं।

2. किन नियमों से निम्नलिखित कथन सत्य हैं ?

(a) $a+b=b+a$

(b) $a+0=a$

(c) $a+(b+c)=(a+b)+c$

(d) $a.(b+c)=a.b+a.c$

(e) $a.1=a$

(f) $a.b=b.a$

3. किसी संख्या का निरपेक्ष मान (absolute value) इस प्रकार लिखा जाता है–

(a) $\sqrt{k}$ (b) $|k|$

(c) $-k$ (d) k

(e) मालूम नहीं

(3) कलन विधि (Alogorithm) की योग्यता

1. निम्नलिखित में कौन-सी अभाज्य संख्या (Prime Number) है ?

(a) 6 (b) 11

(c) 15 (d) 16

(e) 5

2. $\frac{2}{3}\div\frac{1}{6}$ का मान है–

(a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{1}{4}$

(c) 4 (d) 6

3. $3\frac{1}{4}-\frac{1}{3}$ का मान है–

(a) $\frac{3}{4}$ (b) $2\frac{1}{12}$

(c) $2\frac{11}{12}$ (d) $3\frac{1}{12}$

(e) $3\frac{1}{7}$

4. निम्न भिन्नों को सरलतम रूप में लिखिए–

(a) $\frac{3}{15}$ (b) $\frac{10}{12}$

(c) $\frac{25}{45}$ (d) $\frac{24}{39}$

5. निम्नलिखित का गुणनफल निकालो–

(a) $x+2$ और $x+3$ का

(b) $2x+3$ और $x+1$ का

(4) प्रत्ययों (Concepts) का ज्ञान

1. 120 के अखण्ड गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

2. किसी किरण (Ray) के अन्तिम छोर (End point) होते हैं–

(a) एक भी नहीं (b) एक

(c) दो (d) तीन

(e) अनन्त

3. निम्नलिखित कोणो मे से कौन-सा कोण अधिक कोण (Obtuse angle) है ?
   (a) 45° (b) 90°
   (c) 135° (d) 180°
   (e) 225°
4. निम्नलिखित में से कौन-सी आकृति समतल नहीं हो सकती है ?
   (a) वृत्त (b) चतुर्भुज
   (c) चतुष्फलक (Tetrahedron) (d) समलम्ब चतुर्भुज
   (e) पंचभुज

(5) सिद्धान्त, नियम एवं व्यापीकरण का ज्ञान

1. यदि किसी भिन्न के अंश और हर को एक ही संख्या से गुणा किया जाता है तो–
   (a) भिन्न का मान कम हो जाता है
   (b) भिन्न का मान वही रहता है
   (c) भिन्न का मान बढ़ जाता है
   (d) परिणाम गुणा करने वाली संख्या पर निर्भर करता है कि वह 1 से कम है अथवा 1 से अधिक
2. यदि किसी संख्या में दशमलव बिन्दु दाहिनी ओर 3 स्थान हटा दिया जाता है तो इसका आशय हुआ कि हम–
   (a) उस संख्या को 1000 से भाग दे रहे हैं
   (b) उस संख्या को 100 से भाग दे रहे हैं
   (c) उस संख्या को 3 से गुणा कर रहे हैं
   (d) उस संख्या को 1000 से गुणा कर रहे हैं
3. किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग होता है–
   (a) 90° और 180° के बीच
   (b) 180°
   (c) 180° और 360° के बीच
   (d) 360°
   (e) त्रिभुज के आकार पर निर्भर करता है

(6) गणितीय संगठन (Structures) का ज्ञान

1. रिक्त स्थान की संख्या होगी–
   $24 + 76 = 76 + \ldots\ldots$
   (a) 24 (b) 34
   (c) 52 (d) 100
   (e) इनमें से कोई नहीं

2. यदि $a.b = 0$ हो, तो–
   (a) a का मान शून्य होना चाहिए
   (b) b का मान शून्य होना चाहिए
   (c) या तो a का मान शून्य होना चाहिए या b का मान
   (d) a और b दोनों के मान शून्य होने चाहिए
   (e) ऊपर दिये हुए सभी विकल्प सही हैं
3. यदि $P = M + N$ हो, तो–
   (i) $N = P - M$ (ii) $P - N = M$ (iii) $N + M = P$
   तो बताइये उपर्युक्त कथनों में कौन-सी बात सही है ?
   (a) (i) केवल (b) (i) तथा (iii) केवल
   (c) (iii) केवल (d) (ii) तथा (iii) केवल
   (e) तीनों

(7) प्रश्नों के एक रूप से दूसरे रूप में बदलने की योग्यता

1. x का $\frac{1}{8}\%$ बराबर होता है–
   (a) $.000125x$ (b) $.00125x$
   (c) $0.125x$ (d) $.125x$
   (e) $1.25x$
2. यदि कोई गणितीय संक्रिया Δ किन्हीं संख्या a और b पर इस प्रकार हो कि $a \Delta b = a + (a \times b)$ तो $5 \Delta 2$ का मान होगा–
   (a) 10 (b) 12
   (c) 15 (d) 20
   (e) 35
3. कोई लड़का गर्मी की ऋतु में n सप्ताह काम करता है और प्रति सप्ताह उसका वेतन k रुपये हैं। यदि गर्मी के दिनों में उसका खर्च p रुपये हो, तो उसकी कुल बचत होगी–
   (a) $n + k + p$ रुपये (b) $np - k$ रुपये
   (c) $n + k - p$ रुपये (d) $np + k$ रुपये
   (e) उपर्युक्त आँकड़ों में से कोई नहीं

(8) प्रश्नों को पढ़ने तथा व्याख्या (Interpret) करने की योग्यता

किस पूर्णांक के लिए निम्न कथन सत्य है ?

$5 \angle N + 3 \angle 10$

(9) रोज काम आने वाली समस्याओं को हल करने की योग्यता

1. नीचे दी हुई संख्याओं में से किस संख्या को आधार–7 पर प्रकट करें कि संख्या विषम तथा अभाज्य हो जावे–
   (a) 11 (b) 12
   (c) 13 (d) 14

2. दो अंकों की एक संख्या में दहाई का अंक इकाई के अंक का दोगुना है। यदि इकाई का अंक x द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो वह संख्या निम्नलिखित में से किसके द्वारा प्रदर्शित की जायेगी ?

   (a) $3x$ (b) $12x$

   (c) $21x$ (d) $30x$

(10) आँकड़ों के विश्लेषण करने की योग्यता

1. 300 रुपये 1 वर्ष के लिए एक बचत बैंक में जमा किये गये। यदि ब्याज तिमाही मिलता है तो बैंक कितना चक्रवृद्धि ब्याज देती है ? इस प्रश्न को हल करने के लिए क्या कोई अन्य बात जानना जरूरी है और यदि हाँ, तो कौन-सी ?

   (a) कोई नहीं

   (b) रुपया कब तक निकाला जायेगा

   (c) बचत करने का उद्देश्य

   (d) उस आदमी की आयु जिसने रुपया जमा किया है

   (e) ब्याज की दर।

5

गणित पढ़ाने की विधियाँ

[METHODS OF TEACHING MATHEMATICS]

अध्यापक को यह सामान्य अनुभव है कि अधिकतर विद्यार्थी गणित में रुचि नहीं रखते हैं। इसका विशेष कारण, स्वयं विषय नहीं है, परन्तु पाठन-विधि के उपयुक्त न होने के कारण बालक इस विषय को पसन्द नहीं करते हैं। बैलर्ड (Ballard) महोदय के अनुसार तो गणित की शिक्षा, जो एक सुखदायक क्रिया होनी चाहिए थी, एक भयानक स्वप्न बन गयी है। जब कभी अध्यापक किसी एक प्रश्न का हल विद्यार्थियों को देता है तो वे समझते हैं कि यह हल उन पर एक भारस्वरूप है और जबरन उनके ऊपर थोपा गया है, परन्तु उसी प्रश्न के हल करने की विधि बदल देने पर बालक उसमें रुचि लेने लगते हैं और विषय से प्रेम भी करते हैं।

गणित पढ़ाने में भिन्न-भिन्न स्तरों पर भिन्न-भिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है। हमको गणित-पाठन में भिन्न-भिन्न स्तर के बालकों से सम्बन्ध रखना पड़ता है। इस कारण विभिन्न विधियों का प्रयोग गणित पढ़ाने में किया जाता है। इसका कारण यह भी है कि बालकों का विकास समान रूप से नहीं होता है। इसके अतिरिक्त कक्षा में बालक समान आयु के नहीं होते हैं। कुछ बालक 6 या 7 वर्ष के होते हैं, कुछ की आयु इससे अधिक होती है। इसके कारण उनकी मानसिक शक्तियों (Mental Faculties) में अन्तर होता है। उदाहरण के लिए, यह कहा जा सकता है कि 6 या 7 वर्ष का एक विद्यार्थी 15 या 16 वर्ष के विद्यार्थी के बराबर किसी उपविषय (Topic) या विधि को नहीं समझ सकता है, क्योंकि दोनों समूह के बालकों की मानसिक शक्ति अलग-अलग होती है। अधिक आयु वाले बालकों के तर्क का आधार अधिक विचारयुक्त तथा गम्भीर होगा।

उपर्युक्त कथन से यह स्पष्ट है कि एक बच्चे का मस्तिष्क पूर्ण विकसित नहीं होता है जिसके कारण उसकी ओर अधिक ध्यान देने की आवश्यकता होती है। एक अध्यापक तभी अपने पाठन में सफल हो सकता है जबकि वह भिन्न-भिन्न स्तर के बालकों के लिए भिन्न-भिन्न विधियों का प्रयोग करे तथा अपने पाठ को इतना रोचक बनाये कि बालक उसमें रुचि ले सकें तथा उनको गणित से प्रेम हो।

थॉर्नडाइक महोदय ने व्यक्तिगत भिन्नताओं के बारे में कहा है, "एक ही कक्षा में उच्च कोटि तथा निम्न कोटि के बालकों में बड़ा अन्तर होता है। उच्च कोटि के बालक एक ही समय में निम्न कोटि के बालकों से 6 गुना अधिक सीखते हैं या एक ही कार्य को उच्च बालक निम्न बालक की अपेक्षा 1/6 समय में सीख सकते हैं।"

इसलिए अध्यापक के पढ़ाने की विधि इस तरह होनी चाहिए कि उससे बालकों की शक्ति का विकास किया जा सके। इसके साथ-साथ यह बात भी ध्यान देने की है कि एक ही विधि द्वारा सम्पूर्ण विषय (Topic) को समान दक्षता (Efficiency) से नहीं पढ़ाया जा सकता।

गणित की शिक्षण-विधियाँ
(METHOD OF TEACHING MATHEMATICS)

विधि (Method) के प्रयोग करने से पहले यह जान लेना आवश्यक है कि विधि (Method) से क्या तात्पर्य है तथा उसके अन्तर्गत जिन युक्तियों (Devices) तथा प्रविधियों (Techniques) का प्रयोग होता है, वे क्या हैं; विधि, युक्ति और प्रविधि में क्या अन्तर होता है।

विधि (Method)—कक्षा में छात्रों के सीखने तथा शिक्षक के द्वारा शिक्षण-क्रिया से सम्बन्धित जो कार्य किये जाते हैं, उनके ज्ञान के आधार पर ही विधि का स्पष्टीकरण होता है।

किसी भी सीखने की स्थिति (Learning situations) में शिक्षण तथा छात्र का पठन दोनों आते हैं।

शिक्षक द्वारा कक्षा-शिक्षण में निम्न बातें आती हैं—

(1) प्रेरणा (Motivation) देना

(2) समस्या प्रस्तुत करना (Raising the problem)

(3) उदाहरण देना (Give Illustrations)

(4) परख का प्रयोग (Use of Test)

(5) छात्रों की क्रिया को दिशा देना (Direct Students Activities)

(6) छात्रों की सहायता से पाठ्य-सामग्री का संगठन तथा निष्कर्ष निकालना (Organization and drawing conclusions by the help of students)

(7) मूल्यांकन (Evaluation)

छात्रों की क्रियाएँ (Students Activities)—

(1) प्रेरित होना (Stimulation)

(2) निरीक्षण करना (Observation)

(3) पुराने अनुभवों का प्रत्यास्मरण (Recall of Past Experiences)

(4) ध्यान से सुनना (Listen Carefully)

(5) पाठ्य-वस्तु का ज्ञान कराना (Knowledge of Subject-Matter)

(6) निष्कर्ष निकालना (Drawing Inference)

विधि वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा किसी लक्ष्य की प्राप्ति सम्भव है। विधि के अन्तर्गत पाठ्य-वस्तु को क्रम में रखना आता है। यह एक क्रम में चलने वाली प्रक्रिया है। इसमें बहुत-से कार्य किये जाते हैं जिनकी सहायता से लक्ष्य की प्राप्ति होती है, ये सभी कार्य जिनकी सहायता से लक्ष्य की प्राप्ति होती है, ये सभी कार्य जिनकी सहायता से लक्ष्य की प्राप्ति होती है, युक्ति (Devices) कहलाते हैं। इस प्रकार एक विधि के अन्तर्गत बहुत-सी युक्तियाँ (Devices) आती हैं। इस प्रकार शिक्षक कक्षा में जो भी कार्य करता है वह सब विधि नहीं कहलाती है, बल्कि पाठ्य-वस्तु संगठित करना कहलाती है जिससे छात्र भली प्रकार सीख सकें।

युक्तियाँ (Devices)—प्रत्येक विधि के अन्तर्गत युक्तियों का प्रयोग किया जाता है। क्रियाएँ जैसे वर्णन करना (Narration), प्रश्न करना (Questionning), प्रयोग प्रदर्शन (Demonstration) आदि युक्तियाँ कहलाती हैं। ये युक्तियाँ सीखने की क्रिया में सहायता देती हैं। ये युक्तियाँ विधियों से भिन्न हैं, परन्तु उनके अन्तर्गत इनका प्रयोग किया जाता है तथा एक विधि के अन्दर कई युक्तियों का प्रयोग सम्भव है।

प्रविधि (Techniques)—प्रविधि किसी युक्ति के अन्तर्गत प्रयोग की जाती है। शिक्षक की वास्तविक क्रियाएँ ही प्रविधि (Techniques) कहलाती हैं। ये किसी भी युक्ति को एक विशेष रूप देती हैं। उदाहरण के रूप में, प्रश्न करना (Questioning) एक युक्ति है परन्तु प्रश्न किस प्रकार का हो, प्रश्नों की गति क्या हो, प्रश्न करने में शिक्षक के हाव-भाव कैसे हों, प्रश्नों का वितरण (Distribution) कैसा हो आदि सभी क्रियाएँ प्रविधि कहलाती हैं।

दो शिक्षक गणित-शिक्षण में एक ही युक्ति का प्रयोग कर रहे हों परन्तु एक की प्रविधि (Technique) दूसरे से भिन्न हो सकती है। कक्षा-शिक्षण में शिक्षक को इन्हीं प्रविधियों का उपयुक्त प्रयोग सीखने की आवश्यकता है। यही शिक्षक का चातुर्य (Skill) है जो पाठ्य-वस्तु को व्यवस्थित रूप देती है। इसी प्रकार कक्षा-शिक्षण में सहायक सामग्री का ही सही प्रदर्शन भी एक प्रविधि है जिसको प्रयास द्वारा सीखा जाता है। इस प्रकार प्रविधि (Techniques) को अभ्यास द्वारा सीखा जाता है। इस तरह से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि विधि एक योजना है जिसके अन्तर्गत युक्ति (Device) तथा युक्ति के अन्तर्गत प्रविधियाँ (Techniques) आती हैं।

गणित-शिक्षण में निम्नलिखित विधियों (Methods) का प्रयोग किया जाता है।

प्राचीन शिक्षण-विधि

प्राचीन काल में तरुण विद्यार्थियों को सबसे पहले गणित के सभी सूत्र कण्ठस्थ कराये जाते थे, तत्पश्चात् उन सूत्रों का प्रयोग कराके गणित के प्रश्न हल कराये जाते थे। प्रश्न भी कण्ठस्थ करने पड़ते थे। गणित, पाटी (तख्ती) पर धूल बिछाकर की जाती थी। अंक, धूल पर अंगुली से या लकड़ी के नुकीले भाग से लिखे जाते थे। ज्यों-ज्यों गणना बढ़ती जाती थी, अनावश्यक अंक मिटा दिये जाते थे। कभी-कभी पाटी पर खड़िया के टुकड़े से भी लिखते थे। गणना करने में विद्यार्थी पद-पद पर प्रयुक्त सूत्र का उच्चारण करता था। अध्यापक इसकी निगरानी करता था और अशुद्धि होने पर विद्यार्थी की सहायता करता था। जब विद्यार्थी अपनी पुस्तक में दिये हुए प्रश्नों को हल करने में पर्याप्त निपुण हो जाता था तब अध्यापक उसे अन्य प्रश्न करने को देता था। प्रत्येक अध्यापक के पास ऐसे चुने हुए प्रश्नों का भण्डार होता था जो या तो उसके स्वयं बनाये हुए होते थे अथवा अन्य सूत्रों की उपपत्ति (Proof) समझने लगता था। जब विद्यार्थी इस अवस्था तक पहुँच जाता था, तब अध्यापक उसे अंकित कठिन सूत्रों की उपपत्ति बताता था।

ऐसे अध्यापक बहुत कम होते थे, जो शिक्षण की सब अवस्थाओं में विद्यार्थी का पथ-प्रदर्शन कर सकते थे। अतएव उत्साही विद्यार्थी को जिसे आगे पढ़ने की इच्छा होती थी, किसी विद्या-केन्द्र या किसी सुप्रसिद्ध विद्वान के पास अध्ययन के लिए जाना पड़ता था।

कमियाँ

इस प्रकार प्राचीन शिक्षण-विधि दोषपूर्ण (Defective) थी। पहली दो अवस्थाओं में अध्ययन का काम बिल्कुल यन्त्रवत् (Mechanised) होता था। जो विद्यार्थी अध्ययन की तीन अवस्थाओं को पूरा नहीं करता था, वह कण्ठस्थ किये हुए सूत्रों के अतिरिक्त कुछ नहीं जानता था और प्रयुक्त सूत्रों की उत्पत्ति से अनभिज्ञ (Innocent) होने के कारण उनका प्रयोग करते समय अशुद्धियाँ करने को बाध्य होता था।

आजकल गणित पढ़ाने में निम्न विधियों का प्रयोग किया जाता है।

सामान्यानुमान विधि
(INDUCTIVE METHOD)

पिछले कुछ वर्षों में गणित के स्वरूप का अत्यधिक विकास हुआ है। इसका विकास व्यक्तियों के अनुभवों पर आधारित होने के कारण सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) का प्रयोग गणित पढ़ाने में होने लगा है। इसमें भिन्न-भिन्न उदाहरणों का प्रयोग किया जाता है।

सामान्यानुमान विधि (Inductive method) का गणित-पाठन में मुख्य स्थान होता है। मुख्यतया इस विधि का प्रयोग अंकगणित (Arithmetic) तथा रेखागणित (Geometry) में किया जाता है। इसके अतिरिक्त बीजगणित (Algebra) में जहाँ पर नवीन नियमों तथा विचारों का प्रारम्भ किया जाता है, वहाँ भी इस विधि का प्रयोग किया जाता है। इस विधि में जिस सिद्धान्त का प्रयोग होता है, उसमें विद्यार्थी स्वयं भिन्न-भिन्न स्थूल तथ्यों (Concrete Facts) के आधार पर अपनी मानसिक शक्ति द्वारा किसी विशेष तथ्य (Generalization) पर पहुँचता है। चूँकि विद्यार्थी इस विधि में स्वयं किसी नियम पर पहुँचते हैं, इसी कारण इस विधि को सामान्यानुमान विधि (Inductive method) कहते हैं। भिन्न-भिन्न उदाहरणों के आधार पर इस तरह का नियम बनता है। सारांश में यह कहा जा सकता है कि सामान्यानुमान (Inductive method) में विशेष से सामान्य की ओर तथा स्थूल (Concrete) से सूक्ष्म (Abstract) की ओर चलते हैं।

इस विधि का सबसे महत्त्व रेखागणित (Geometry) में है, क्योंकि इसके द्वारा साध्यों (Theorems) के वर्णन (Enunciation) पर पहुँच जाते हैं। भिन्न-भिन्न उदाहरणों के आधार पर साध्य तथा उनको हल करने की विधियों का आधार सामान्यानुमान विधि (Inductive method) ही है। यह विधि निम्न पदों (Steps) पर आधारित है।

(1) उपयुक्त उदाहरणों को खोज निकालना तथा जमा करना। इनके जमा करने का निम्न आधार होना चाहिए—

(अ) उदाहरणों का बालक के जीवन से सम्बन्ध होना चाहिए।

(ब) उदाहरणों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए, जिससे किसी नियम पर पहुँचा जा सके।

(स) उदाहरण साधारण होने चाहिए ताकि नियम बिल्कुल स्पष्ट हो जायें तथा विद्यार्थी उनको आसानी से ग्रहण (Understand) कर सकें।

(2) समस्याओं को हल करते समय स्वयं विद्यार्थी उनके आधार पर कोई नियम निकाल सकें।

उदाहरण—माना कि विद्यार्थियों को एक नवीन पद (Term) रूढ़ संख्या (Prime Number) का ज्ञान देना है।

उपर्युक्त पद का ज्ञान देने में अध्यापक 1 से 10 संख्याओं को लिखकर विद्यार्थियों को उनके गुणनखण्ड (Factors) करने को कहेगा और निम्न रूप से कार्य करेगा—

1 = कोई गुणनखण्ड नहीं	$6 = 2 \times 3$
2 = कोई गुणनखण्ड नहीं	7 = कोई गुणनखण्ड नहीं
3 = कोई गुणनखण्ड नहीं	$8 = 2 \times 2 \times 2$
$4 = 2 \times 2$	$9 = 3 \times 3$
5 = कोई गुणनखण्ड नहीं	$10 = 2 \times 5$

प्रश्न—उपर्युक्त प्रश्न में आप 4, 6, 8 और 10 में क्या देखते हो ?

उत्तर—इनमें 2 का भाग जा सकता है।

प्रश्न—संख्या 9 से क्या सूचना मिलती है ?

उत्तर—इसमें 3 का भाग जा सकता है।

प्रश्न—4, 6, 8, 9 तथा 10 क्या सामान्य गुण हैं ?

उत्तर—ये संख्याएँ किसी संख्या से विभाजित की जा सकती हैं।

इसके पश्चात् अध्यापक विद्यार्थियों को 1, 2, 3, 5, 7 संख्याओं पर ध्यान देने को कहेगा और निम्नलिखित प्रश्न करेगा—

प्रश्न—उपर्युक्त संख्याओं की क्या विशेषता है ?

उत्तर—इनमें कोई भी संख्या किसी भी संख्या से विभाजित नहीं की जा सकती है।

उपर्युक्त उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है तथा एक नियम निर्धारित किया जा सकता है कि रूढ़ संख्या (Prime Number) वह संख्या है जिसमें 1 या स्वयं उसी संख्या के अतिरिक्त किसी अन्य संख्या से भाग न दिया जा सके। विद्यार्थी इस उदाहरण से इस नियम पर पहुँच सकते हैं।

गुण (Merits)

(1) इस विधि द्वारा आसानी से नियम का निर्माण किया जा सकता है।

(2) इसके द्वारा विद्यार्थी की निरीक्षण-शक्ति (Power of Observation) तथा मानसिक क्षमता (Intellectual Capacity) का विकास होता है।

(3) इस विधि द्वारा कार्य आसान हो जाता है, क्योंकि इनमें गमन विशेष वस्तुओं से सामान्य की ओर (From Particular to General) होता है।

कमियाँ (Demerits)

इस विधि में सबसे बड़ा दोष यह है कि इसमें कुछ सीमा तक सम्भावना (Probability) की जा सकती है। जितने अधिक तथ्यों का निरीक्षण किया जा सकता है, उतनी ही सम्भावना अधिक होती है। इसलिए गणित के ठीक प्रदर्शन में इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता है।

निगमन विधि
(DEDUCTIVE METHOD)

निगमन विधि (Deductive Method) सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) के बिल्कुल विपरीत है। इस विधि में सामान्य नियम से किसी विशेष नियम की ओर गनन (From General to Particular or From Abstract to Concrete) होता है। इसका स्वयं का कोई अस्तित्व नहीं होता है। परन्तु यह बहुत आवश्यक तथा महत्त्वपूर्ण होती है, जबकि यह विधि सामान्यानुमान (Inductive Method) के पश्चात् प्रयोग में लायी जाती है।

उदाहरण—650 रुपये का 4 प्रतिशत की दर से 3 वर्ष का ब्याज (Interest) ज्ञात करो।

इस प्रश्न में सबसे पहले ब्याज निकालने के सूत्र (Formula) को लिखा जाता है।

$$\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{प्रतिशत दर} \times \text{समय}}{100}$$

उपर्युक्त सूत्र के प्रयोग करने पर ब्याज ज्ञात किया जा सकता है, जैसे—

$$\text{ब्याज} = \frac{650 \times 4 \times 3}{100}$$

गुण (Merits)

(1) यह विधि उपयुक्त तथा संक्षिप्त (Concise) होती है, क्योंकि प्रश्न का हल एक विशेष सूत्र के आधार पर होता है।

(2) इस विधि को आसानी से याद किया जा सकता है, क्योंकि इसमें एक ही सूत्र का प्रयोग होता है।

(3) इस विधि द्वारा नवीन समस्याओं का समाधान किया जा सकता है।

कमियाँ (Demerits)

(1) गणित आरम्भ करने वालों के लिए यह विधि उपयुक्त नहीं होती है, क्योंकि उनको गणित के नियम तथा सूत्र को समझना कठिन होता है।

(2) बालकों द्वारा बिना स्पष्ट उदाहरणों के सूत्र का प्रयोग सही रूप से नहीं हो पाता है।

(3) बालकों को बिना उदाहरणों के सूत्र समझने में कठिनाई होती है और वे उनका सही प्रयोग भी नहीं कर सकते हैं तथा विधि को सही रूप से समझ भी नहीं पाते हैं।

(4) इस विधि में भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्नों के लिए अनेक सूत्र याद करने पड़ते हैं, जो कि कठिन कार्य है।

परन्तु इन दोनों विधियों का साथ-साथ प्रयोग करना ठीक होता है। इनको अलग-अलग प्रयोग करने से गणित का सही सम्बोध (Concept) नहीं हो पाता है। दोनों विधियों का संयुक्त रूप से प्रयोग करना लाभप्रद होता है।

उपर्युक्त को हम निम्न रूप में संक्षिप्त रूप से कह सकते हैं—

(1) सामान्यानुमान विधि (Inductive Method) का प्रयोग उन स्थानों पर करना चाहिए जहाँ उपयुक्त मौका हो।

(2) निगमन विधि (Deductive Method) का प्रयोग सदैव सामान्यानुमान विधि के पश्चात् करना चाहिए।

(3) निगमन विधि तथा उसके आधार पर किसी वस्तु को केवल विशेष परिस्थिति में याद किया जाना चाहिए।

विश्लेषण विधि
(ANALYTIC METHOD)

यह विधि भी गणित पढ़ाने की एक आवश्यक विधि है। इसका प्रयोग मुख्यत निम्न में किया जाता है—

(1) जब अंकगणित में किसी नवीन समस्या को हल करना होता है।

(2) जब किसी साध्य (Theorem) को हल करना होता है।

(3) जब रेखागणित की किसी रचना को हल करना होता है।

विश्लेषण विधि में किसी जटिल समस्या (Complicated Problem) को सरल समस्याओं में विभक्त किया जाता है। इन सरल समस्याओं को बालक सरलता से हल कर सकते हैं। इस विधि को कक्षा के बालक स्वीकार करते हैं। इसके प्रत्येक पद (Step) का कुछ आधार होता है तथा उसका अपना महत्त्व होता है।

विश्लेषण विधि वह है, जिसके द्वारा विद्यार्थी समस्या का हल ज्ञात करते हैं तथा इस बात की खोज करते हैं कि किस विशेष पद (Step) को वे भूल गये हैं। इसमें विद्यार्थियों की सोचने की विधि सही ढंग पर होती है जो गणित पढ़ाने का एक मुख्य उद्देश्य होता है। वास्तव में यह विधि खोज करने की विधि है, जिसका कि शिक्षा में बड़ा महत्त्व है, क्योंकि बालक एक अन्वेषक (Discoverer) के रूप में इस विधि में कार्य करता है और शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बालक को स्वयं खोज करना सिखाना है।

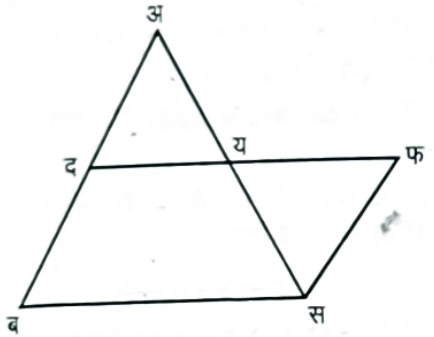
यदि अध्यापक रेखागणित की किसी साध्य (Theorem) को पढ़ाते समय प्रत्येक पद का विश्लेषण विद्यार्थियों की सहायता से ज्ञात नहीं करता है तो वे कभी भी इन पदों का सही ज्ञान प्राप्त नहीं कर पाते हैं तथा पदों की आवश्यकता को भी नहीं समझ पाते हैं। परिणाम यह होता है कि बालक साध्य के सही हल को समझ नहीं

पाते हैं बल्कि साध्य की रचना और हल के पदो को केवल याद कर लेते हैं। इस तरह से यदि विश्लेषण सही रूप से नही होता तो गणित का पाठन अर्थरहित हो जाता है।

रेखागणित में विश्लेषण
(ANALYSIS IN GEOMETRY)

उदाहरण (Illustration)

उदाहरण 1. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर (Parallel) तथा आधी होती है।



विश्लेषण

प्रश्न—क्या दिया है ?

(अ ब स एक Δ है जिसकी अ ब भुजा तथा अ स भुजा के मध्य बिन्दु क्रमशः द और य हैं)

प्रश्न—क्या सिद्ध करना है ?

(द य रेखा ब स रेखा के समान्तर तथा आधी है)

प्रश्न—द य रेखा ब स रेखा की $\frac{1}{2}$ कब हो सकती है ?

(जब द य रेखा को दोगुना कर दिया जाय और 2 द य = ब स के हो, इसलिए द य को फ बिन्दु तक बढ़ाया जाय ताकि द य = य फ के)

प्रश्न—दूसरी क्या बात सिद्ध करनी है ?

(दूसरी बात यह है कि द य समान्तर होगी ब स के)

प्रश्न—यह कब सिद्ध हो सकता है ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि द ब स फ एक समान्तर चतुर्भुज है)

प्रश्न—हम कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि **द ब स फ** एक समान्तर चतुर्भुज है ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि द ब बराबर और समान्तर फ स के)

प्रश्न—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि **द ब = फ स** ?

(यदि यह सिद्ध हो जाय कि फ स = अ द क्योंकि द ब = अ द के)

प्रश्न—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि द ब = फ स ?

(यह ∠ द अ य = ∠ फ स य = जो कि एकान्तर कोण हैं)

प्रश्न—यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि फ स = अ द तथा ∠ द अ य = ∠ फ स य ?

(ये दोनों त्रिभुज अ द य और फ य स को अनुरूप (Congruent) सिद्ध करने पर हो सकता है। त्रिभुजों की अनुरूपता आसानी से सिद्ध हो सकती है जिसके आधार पर उपर्युक्त प्रश्न हल हो सकता है।)

उदाहरण 2. एक वर्ग (Square) जिसका क्षेत्रफल (Area) 225 वर्ग मीटर है। उसके चारों ओर 12 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से तार लगाने पर क्या व्यय होगा ?

विश्लेषण

प्रश्न—इस प्रश्न में क्या दिया है ?

(वर्ग का क्षेत्रफल और तार लगाने की दर)

प्रश्न—क्या ज्ञात करना है ?

(तार लगाने का सम्पूर्ण व्यय ज्ञात करना है)

प्रश्न—तार लगाने के सम्पूर्ण व्यय को कब मालूम कर सकते हैं ?

(जब सम्पूर्ण तार की लम्बाई तथा तार की दर ज्ञात हो)

प्रश्न—तार की लम्बाई क्या होगी ?

(तार की लम्बाई वर्ग की परिमित (Perimeter) के बराबर होगी)

प्रश्न—वर्ग की परिमिति कैसे ज्ञात की जाती है ?

(वर्ग की एक भुजा को 4 से गुणा कर परिमिति ज्ञात हो जाती है।

प्रश्न—वर्ग की भुजा का मान कैसे ज्ञात होता है ?

(वर्ग के क्षेत्रफल (Area) का वर्गमूल (Square Root) निकालने पर भुजा का मान ज्ञात हो सकता है।)

चूँकि वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात है, इसलिए प्रश्न उपर्युक्त विश्लेषण के आधार पर हल किया जा सकता है।

उदाहरण 3. यदि अ : ब = स : द तो सिद्ध कीजिए $\text{अ स} + 2\text{ब}^3 : \text{ब स} = \text{स}^2 + 2\text{ब द} : \text{द स}$

विश्लेषण

$$\text{अ स} + 2\text{ब}^2 : \text{ब स} = \text{स}^2 + 2\text{ब द} : \text{द स} \text{ सही होगा।}$$

यदि $$\frac{\text{अ स} + 2\text{ब}^2}{\text{ब स}} = \frac{\text{स} + \text{ब द}}{\text{द स}}$$

या यदि $$(\text{अ स} + 2\text{ब}^2)\,\text{द स} = (\text{स}^2 + 2\text{ब द})\,\text{ब स}$$

या यदि $$\text{अ स}^2\,\text{द} + 2\text{ब}^2\,\text{द स} = \text{ब स}^2 + 2\text{ब}^2\,\text{द स}$$

या यदि $$\text{अ स}^2\,\text{द} = \text{ब स}^4$$

या यदि $$\text{अ द} = \text{ब स}$$

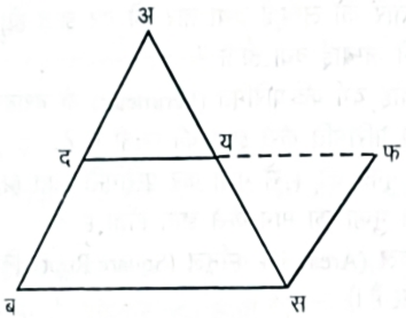
या यदि $$\frac{\text{अ}}{\text{द}} = \frac{\text{स}}{\text{द}} \text{ (जोकि दिया है)}$$

संश्लेषण विधि
(SYNTHETIC METHOD)

संश्लेषण विधि (Synthetic Method), विश्लेषण विधि (Analytic Method) के बिल्कुल विपरीत है। इस विधि में ज्ञात (Known) से अज्ञात (Unknown) की ओर को जाते हैं। जब कभी हमको रेखागणित में कोई साध्य सिद्ध करनी होती है तो हम परिकल्पना (Hypothesis) के आधार पर किसी निष्कर्ष (Conclusion) पर पहुँचते हैं। रेखागणित की पुस्तकों में जिस रूप में साध्यों का हल लिखा होता है, वह सब संश्लेषण का ही रूप है। इसको विश्लेषण विधि के पदों का संक्षिप्त रूप कहते हैं।

संश्लेषण में एक तथ्य (Fact) की सत्यता की जाँच होती है। परन्तु इससे प्रस्तुत पाठ का सही तथा वास्तविक ढाँचा (Plan) ज्ञात नहीं होता है। इस तरह संश्लेषण विधि साध्य सिद्ध करती है, परन्तु उसकी व्याख्या नहीं करती। इनके द्वारा विश्लेषण विधि से प्राप्त तथ्य की जाँच की जा सकती है।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समान्तर होती है।



दिया है (Given)—अ ब स एक त्रिभुज है और द और य क्रमशः अ ब और अ स के मध्य बिन्दु हैं तथा द और य मिला दिये गये हैं।

सिद्ध करना है (To prove)—द य ॥ और $= \frac{1}{2}$ ब स के।

रचना (Construction)—द य को बिन्दु फ तक इस तरह बढ़ाया कि द य = य फ के। फ और स को मिला दिया।

उत्पत्ति (Proof)—त्रिभुज अ द य और य फ स में

अ य = य स (दिया है)

द य = य फ (रचना से)

Δ अ य द = Δ स य फ   सम्मुख कोण (Vertically Opposite Angles)

∴ D अ द य = D य फ स

∴ ∠ द अ य = ∠ फ स य

परन्तु ये एकान्तर (Alternate) कोण हैं।

∴ ब द ॥ फ स

फिर अ द = ब द

∴ ब द = और समान्तर फ स

∴ ब द फ स एक समान्तर चतुर्भुज हुआ

∴ द फ = ब स

∴ द य = $\frac{1}{2}$ द फ

∴ द य = $\frac{1}{2}$ ब स

∴ द य ॥ और = $\frac{1}{2}$ ब स   यही सिद्ध करना है।

विश्लेषण तथा संश्लेषण विधियों की उपयोगिता (Value of Analytic and Synthetic Methods)

(1) विश्लेषण विधि की यह विशेष उपयोगिता है कि इसके द्वारा अज्ञात (Unknown) को ज्ञात (Known) से जोड़ा जा सकता है। परन्तु संश्लेषण विधि द्वारा केवल एक ही ज्ञान होता है। प्रो. यंग (Young) के कथनानुसार, संश्लेषण विधि में सूखी घास से एक तिनका निकाला या ढूँढ़ा जाता है, परन्तु विश्लेषण विधि में स्वयं तिनका घास से बाहर निकलना चाहता है।

(2) संश्लेषण विधि द्वारा किसी वर्णन की पुष्टि की जाती है परन्तु इसमें सीखने वाले को कोई विशेष मानसिक लाभ नहीं होता है, जबकि विश्लेषण विधि में मानसिक क्रिया को लाभ होता है।

(3) विश्लेषण विधि में बालक एक खोज करने वाले की तरह कार्य करता है। विद्यार्थी इस विधि में संश्लेषण विधि की अपेक्षा अधिक सक्रिय रहता है।

(4) पुस्तकों में प्रश्न का हल संश्लेषण विधि द्वारा दिया जाता है, जिससे बालकों को अधिक लाभ होता है, क्योंकि उसका निश्चित रूप होता है।

कक्षा में संश्लेषण विधि का स्थान (Place of Synthetic Method in Class-room)

इसका कक्षा में महत्त्वपूर्ण स्थान है। कक्षा में विश्लेषण विधि द्वारा की गयी खोजों को इस विधि द्वारा क्रम से रखा जाता है तथा दुबारा निरीक्षण किया जाता है। चूँकि इस क्रिया में ज्ञात से अज्ञात की ओर जाना होता है, इसलिए इसके द्वारा प्रश्नों के हल करने में सरलता तथा सही गमन सम्भव है। प्रत्येक प्रकार के गणित के पाठ में इसका प्रयोग किया जा सकता है।

ह्यूरिस्टिक विधि
(HEURISTIC METHOD)

'ह्यूरिस्टिक' शब्द एक ग्रीक (Greek) शब्द से निकला है, जिसका अर्थ है—**'खोज'** (Discovery)। इस विधि में बालक स्वयं खोज करता है। उसको कुछ

बताया नहीं जाता है और वह स्वयं सक्रिय रहता है। इस विधि में बालक स्वयं ज्ञान की खोज करते हैं और अध्यापक उनको कम से कम ज्ञान देता है। परन्तु माध्यमिक कक्षाओं में बच्चों की योग्यताओं का विकास इस सीमा तक नहीं हो पाता है कि वे स्वयं कोई वास्तविक खोज कर सकें, फिर भी उनको इस विधि में पर्याप्त मात्रा तक स्वतन्त्रता होती है कि वे स्वयं कार्य करें और शिक्षक उनको समय-समय पर सहायता दें तथा प्रश्नों के आधार पर नवीन ज्ञान दें। इस विधि में आने वाली पुस्तकें भी ह्यूरिस्टिक ढंग पर लिखी होनी चाहिए ताकि बालक उसकी सहायता से कार्य कर सकें। यह विधि वह है, जिसमें विद्यार्थी स्वयं अधिक से अधिक खोज करें और शिक्षक उन्हें कम से कम सहायता दे।

गुण (Merits)

(1) इस विधि में बालक स्वयं क्रियाशील (Active) होते हैं और उनको सोचने का मौका मिलता है।

(2) इस विधि द्वारा बालकों को विषय का सही ज्ञान होता है। एक विद्यार्थी जो स्वयं किसी समस्या को हल करता है, उसको समस्या में उत्पन्न प्रत्येक कठिनाई का सही ज्ञान हो जाता है, जिसके आधार पर समस्या आसानी से हल हो सकती है।

(3) इस विधि में बालकों की रुचि तथा कार्य करने की इच्छा दोनों अन्य विधियों की अपेक्षा अधिक होती है।

(4) अध्यापक इस विधि में प्रत्येक बालक के सम्पर्क में आता है, जिससे वह प्रत्येक बालक की मानसिक क्षमता को समझ सकता है तथा उसके विकास में सहायता दे सकता है।

(5) इस विधि में घर पर अध्ययन अन्य विधियों की अपेक्षा सरल तथा कम होता है।

कमियाँ (Demerits)

(1) गणित प्रारम्भ करने वाले के लिए यह विधि उपयुक्त नहीं है।

(2) प्रारम्भ में यह विधि धीरे चलती है।

(3) कभी-कभी बालकों को गणित के तथ्यों (Facts) की खोज करना कठिन प्रतीत होता है।

(4) इस विधि में अध्यापक को विशेष तैयारी करनी पड़ती है।

(5) प्रत्येक अध्यापक इस विधि को कक्षा में सुचारु रूप से नहीं चला सकता है।

(6) इस विधि को चलाने के लिए कक्षा भी छोटी होनी चाहिए।

प्रयोगशाला
(LABORATORY METHOD)

ह्यूरिस्टिक विधि*की भाँति इस विधि में भी बालक गणित के तथ्यों (Facts) की खोज प्रयोगशाला में करते हैं। इस विधि में खोज प्रश्नों के आधार पर न होकर प्रयोगों द्वारा की जाती है। भिन्न-भिन्न प्रयोग; जैसे—क्षेत्रफल (Area), आयतन

(Volume), रेखा (Line), कोण (Angle) आदि की तोल (Weighing) तथा नाप (Measuring) कर आपस का सम्बन्ध प्रयोगों द्वारा स्थापित किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक बालक वृत्त के क्षेत्रफल (Area) तथा उसके अर्द्धव्यास (Radius) में सम्बन्ध ज्ञात करना चाहता है। इस समस्या को हल करने में बालक निम्न प्रयोग करेगा—

प्रयोग—वह कार्ड-बोर्ड के भिन्न-भिन्न गोलाई के बहुत-से वृत्त तैयार करेगा फिर प्रत्येक वृत्त (Circle) के क्षेत्रफल (Area) तथा उसके अर्द्धव्यास (Radius) को ज्ञात करेगा। इन दोनों के अनुपात के आधार पर वह एक निष्कर्ष पर पहुँचेगा।

प्रत्येक दशा में—

$$\text{वृत का क्षेत्रफल} = \frac{22}{7}\,(\text{अर्द्धव्यास})^2$$

इस तरह से भिन्न-भिन्न प्रयोगों के आधार पर उपर्युक्त सूत्र (Formula) ज्ञात हो जाता है।

गुण (Merits)

(1) खोज करने का ढंग प्राकृतिक (Natural) होता है।

(2) यह सदैव स्थूल (Concrete) होता है, जिसके कारण बालक इसमें रुचि (Interest) तथा आनन्द लेते हैं।

(3) इसके द्वारा गणित के प्रयोग (Application) आसानी से ज्ञात किये जाते हैं।

(4) इसके द्वारा बालकों को स्थान (Space) का सही बोध होता है। विद्यार्थी जिसने बहुत-से कोण नाप लिए हों, उसको कोण का सही बोध हो सकता है।

कमियाँ (Demerits)

(1) विद्यालय के बालकों को प्रयोगों द्वारा गणित के तथ्यों (Facts) की खोज करना आसान नहीं होता है।

(2) यह विधि ही मन्द (Slow) विधि है।

(3) इस विधि में व्यय अधिक होता है।

(4) इस विधि में बालकों का गणित के तथ्यों (Facts) से सम्बन्ध होता है, परन्तु उनमें गणित सम्बन्धी तर्क-शक्ति (Power of Reasoning) का विकास नहीं होता है, जो कि अधिक आवश्यक है।

व्याख्यान विधि
(LECTURE METHOD)

यह विधि निम्न कक्षाओं में उपयुक्त नहीं होती है। इसका प्रयोग उच्च कक्षाओं में लाभप्रद होता है। परन्तु उच्च कक्षाओं में भी इसके साथ-ही-साथ प्रश्न-उत्तर विधि का प्रयोग भी करना चाहिए। आधुनिक युग में गणित पढ़ाने में यह विधि स्कूलों में प्रयोग में नहीं लायी जाती है, क्योंकि इससे बालकों की अपेक्षा शिक्षक अधिक सक्रिय (Active) होता है। इस विधि में शिक्षक अपने व्याख्यान के द्वारा बालकों को नवीन ज्ञान देता है।

गुण (Merits)

(1) इस विधि द्वारा अधिक पाठ्य-वस्तु को कम समय में दिया जा सकता है।

(2) यह विधि बड़ी कक्षाओं में उपयुक्त होती है।

(3) इस विधि में विचारों की कड़ी (Sequence of Ideas) का क्रम टूटता नहीं है।

(4) यह विधि शिक्षक के लिए सरल है।

कमियाँ (Demerits)

(1) इनसे केवल सूचना प्राप्त होती है जो गणित में विशेष आवश्यक नहीं है।

(2) विद्यार्थी कक्षा में ध्यान नहीं देते हैं; क्योंकि यह विधि विद्यार्थी के मस्तिष्क को सोचने का अवसर नहीं देती है।

(3) इस विधि में एक विचार दूसरे के बाद शीघ्रता से आता है, जिससे घर पर अध्ययन अधिक करना पड़ता है।

(4) इस विधि में शिक्षक कक्षा में विद्यार्थियों के सम्पर्क (Contact) में नहीं आ पाता है।

डॉगमैटिक विधि
(DOGMATIC METHOD)

इस विधि में गणित पढ़ाने की सूक्ष्म रूपरेखा अध्यापक का कड़ापन (Rigour) होता है। यह विधि मनोविज्ञान की विधि के बिल्कुल विपरीत होती है, जहाँ कि शिक्षक बालकों की व्यक्तिगत योग्यता (Ability) पर ध्यान नहीं देता है। इस विधि के अनुयायियों (Followers) का यह मत है कि गणित-पाठन में विशेष ध्यान उसकी सत्यता (Exactness) पर होना चाहिए।

इस विधि में गणित को याद कराया जाता है। इस तरह से भिन्न-भिन्न नमूनों के आधार पर गणित को पढ़ाया जाता है, जिससे बालकों में गणित समझने की योग्यता (Ability) तथा जानकारी (Understanding) पैदा हो जाय। अध्यापक इस विधि में पर्याप्त मात्रा में सख्ती करके गणित पढ़ाते हैं।

उपर्युक्त विधि का प्रयोग गणित पढ़ाने में मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों के बिल्कुल विपरीत होता है। बालकों को इस विधि द्वारा गणित के प्रति रुचि उत्पन्न नहीं हो पाती है। इसलिए आधुनिक युग में इस विधि का प्रयोग गणित पढ़ाने में नहीं होता है।

गणित-शिक्षण की वर्तमान दशा
(PRESENT POSITION OF TEACHING MATHEMATICS)

आधुनिक भौतिक संसार में गणित-शास्त्र पढ़ाने का बड़ा ही महत्त्व है। आजकल की सभ्यता की नींव, गण्ति पर आधारित है, अर्थात् यह कहिए कि लौकिक, वैदिक तथा सामाजिक जो व्यापार है, उन सब में गणित का उपयोग है। लेकिन दुःख का विषय है कि आजकल गणित-शिक्षण सन्तोषजनक नहीं है। गणित

का पठन-पाठन प्रारम्भिक स्तर से लेकर उच्चतम स्तर तक किया जा रहा है इस कक्षा में अनेक अनुसन्धान आए-दिन होते रहते हैं। लेकिन खेद का विषय है कि हम प्रत्येक क्षेत्र से क्या व्यापार, न्यायालय तथा छोटे-से-छोटे कल-कारखानों में कार्य करने वालों से यही सुनते हैं कि उनके कर्मचारी गणित सम्बन्धी ज्ञान एवं प्रयोग में दक्षता नहीं रखते। लेकिन इन सबका कारण क्या है ? हम इस पर गहनता से विचार करें तो हमें अनेक कारण मालूम होते हैं। यथा–

(1) गणित-शास्त्र को ऐच्छिक (Optional) विषय बना रखा है, इसलिए विज्ञान के विद्यार्थी तो गणित-शास्त्र में योग्यता रखते हैं और कला (Art) तथा वाणिज्य (Commerce) के विद्यार्थी इसके ज्ञान से शून्य रह जाते हैं। यही कारण है कि कार्यालयों में उन्हें गणित सम्बन्धी कार्य में अनेक अड़चनें आती हैं। यहाँ तक कहिए कि कला (Art) का विद्यार्थी तो जरा-जरा से गुणा-भाग में गलती कर देता है; बड़ी-बड़ी समस्याओं का तो कहना ही क्या है।

(2) आजकल गणित-शिक्षण परीक्षा में पास होने के लिए कराया जाता है। इसमें लड़का परीक्षा में पूछे जाने वाले खास-खास प्रश्नों को रट लेता है। इससे वह परीक्षा में तो पास हो जाता है लेकिन उसका गणित सम्बन्धी ज्ञान अधूरा रह जाता है और वह गणित सम्बन्धी कार्य को भाररूप समझता है।

(3) प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या अधिक होती है। इससे अध्यापक प्रत्येक विद्यार्थी के सम्पर्क में नहीं आ सकता है और न उसके विषय में खास जानता ही है कि किस लड़के की क्या निजी कठिनाइयाँ हैं। कक्षा के अन्दर सभी प्रकार के बालक होते हैं—कुछ तो तीव्र बुद्धि वाले, कुछ मध्यम तथा कुछ मन्द बुद्धि वाले। जब अध्यापक कक्षा में पूछता है कि 'समझ में आ गया' तो तीव्र बुद्धि वाले कह देते हैं कि 'समझ में आ गया'—इससे मन्द बुद्धि वाले इस ज्ञान से वंचित रह जाते हैं और उन्हें फिर इस विषय की तरफ कोई खास रुचि नहीं रहती और वह इस विषय को नीरस तथा भारस्वरूप समझने लगते हैं।

(4) विद्यार्थियों के ऊपर इतनी पाठ्य-सामग्री लाद दी जाती है कि उन्हें वे ठीक प्रकार से ग्रहण नहीं कर पाते और परीक्षा के लिए खास प्रश्नों को रट लेते हैं, जिससे वे परीक्षा में तो पास हो जाते हैं, लेकिन उनका ज्ञान गणित की तरफ विकसित नहीं होता है और गणित-शास्त्र में वह कूप-मण्डूक बने रह जाते हैं।

(5) अध्यापकगण व्यक्तिगत परीक्षाफल पर अधिक ध्यान देते हैं और कहते हैं कि मेरे विषय में इतने लड़के प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण हुए हैं तथा इतने द्वितीय श्रेणी में। वह परीक्षाफल का सामूहिक दृष्टि से मूल्यांकन नहीं करते हैं। परिणाम यह होता है कि विद्यार्थी अधिक मात्रा में फेल हो जाते हैं। फिर वह गणित विषय को नीरस समझकर छोड़ देते हैं, जिससे उनको आगामी जीवन में बड़ी कमी अनुभव होती है।

(6) गणित के जो प्रयोग तथा अन्वेषण होते हैं, वे ऐसी पत्रिकाओं में प्रकाशित होते हैं जो एक तो बहुत कीमती (Costly) होती हैं, इसके अतिरिक्त प्रत्येक जगह आसानी से उपलब्ध भी नहीं होती हैं जिससे विद्यार्थी गणित-शास्त्र में अधिक योग्यता प्राप्त नहीं कर सकता।

सुझाव

उपर्युक्त सब बातों को ध्यान में रखते हुए हमें इन दोषों के निवारण हेतु विद्यार्थी को इस योग्य बनाना है कि वह अपने उद्योग तथा घरेलू व सामाजिक जीवन के सम्बन्ध में आने वाले हिसाब-किताब और नाप-तौल की समस्याओं को शीघ्रता से हल कर सकें।

(1) गणित जैसा विषय प्रत्येक विभाग (Faculty) के छात्रों को अनिवार्य होना चाहिए, जिससे उन्हें अपने व्यावहारिक जीवन में कोई कठिनाई अनुभव न हो।

(2) विद्यार्थी को प्रत्येक पद (Steps) पर सोचने की शक्ति प्रदान करनी चाहिए जिससे उनका मस्तिष्क एकाग्र (Concentrate) हो जायेगा, जिससे यह विषय बड़ा ही रोचक बन जायेगा। हो सके तो बालकों को कुछ चीजों का प्रदर्शन (Demonstration) भी देना चाहिए।

(3) कक्षा में बालकों की संख्या निश्चित (Limited) होनी चाहिए। ज्यादा से ज्यादा एक कक्षा में 30-35 लड़के होने चाहिए, जिससे अध्यापक कक्षा में प्रत्येक छात्र की कमजोरी को समझ सकें।

(4) विद्यार्थियों के लिए पाठन-सामग्री भी एक निश्चित (Limited) मात्रा में होनी चाहिए जिससे विद्यार्थी उस विषय को भार-रूप न समझें।

(5) बच्चों की व्यक्तिगत योग्यता का भी गणित-शिक्षण में अधिक महत्त्व है। मन्द और मध्यम श्रेणी के बच्चों का वर्गीकरण करके उन पर अलग-अलग ध्यान देना चाहिए।

(6) गणित को परीक्षा की दृष्टि से रखकर नहीं पढ़ाना चाहिए, बल्कि उसे विस्तारपूर्वक पढ़ाना चाहिए।

(7) गणित में व्यावहारिक रूप में आने वाली चीजों पर अधिक ध्यान देना चाहिए, क्योंकि आज एक बड़े से बड़ा गणितज्ञ भी घरेलू ज्ञान से अनभिज्ञ रहता है। इसलिए व्यावहारिक ज्ञान जरूरी है।

(8) गणित की खोजें तथा प्रयोग ऐसी पत्रिकाओं में प्रकाशित होने चाहिए, जो कि प्रत्येक विद्यालयों में उपलब्ध हों तथा कीमती भी न हों, जिससे प्रत्येक विद्यार्थी सरलता से उस ज्ञान को ग्रहण कर सके।

■■

6

बेसिक शिक्षा तथा गणित-शिक्षण

[BASIC EDUCATION AND TEACHING MATHEMATICS]

बेसिक शिक्षा में गणित का महत्त्व

बेसिक शिक्षा तीन माध्यमों (Mediums) द्वारा दी जाती है—प्रकृति (Nature), समाज (Society) और उद्योग (Craft)। बालक का जीवन प्रकृति और समाज में बीतता है, इसलिए बेसिक शिक्षा में प्रकृति और समाज के सन्तुलन पर विशेष बल दिया जाता है। गणित प्रकृति और समाज में सम्बन्ध स्थापित करता है और उद्योग की वृद्धि में सहायक है। बालक को प्राकृतिक घटनाओं; जैसे—सूर्य, चन्द्रमा, तारों के निकलने का समय, उनकी स्थिति तथा दिशा, ऋतुओं तथा वर्षा आदि के ज्ञान की आवश्यकता होती है। यह सब गणित द्वारा ही सम्भव है। इस प्रकार गणित प्राकृतिक घटनाओं को समझने में बहुत सहायक है। घर और समाज सम्बन्धी समस्याओं; जैसे—खाने-पीने, कपड़े और मकान बनाने; लेन-देन में उठने वाले खर्चों के हिसाब-किताब, शादी, श्राद्ध और अन्य सामाजिक उत्सवों में हुए आय-व्यय के ब्यौरों का सामना करना पड़ता है; वे सब समस्याएँ भी गणित के द्वारा ही सुलझायी जा सकती हैं। इस प्रकार सामाजिक समस्याओं में भी गणित की आवश्यकता पड़ती है। उद्योग में तो गणित का कदम-कदम पर उपयोग है। खेतों का क्षेत्रफल, बीजों की नाप-तोल और उनसे उत्पादित पदार्थों की तोल, भण्डार-बिक्री, खरीद-बिक्री, कागज, लकड़ी, लोहा, जस्ता, टीन आदि की बाजार-दर, रंग, रस-द्रव्य (Chemical) आदि का अनुपात के अनुसार उपयोग, लाभ-हानि का हिसाब फैलाना आदि बातों का हल बिना गणित के सम्भव नहीं है। अतः गणित का उपयोग तीनों प्रकार के माध्यमों—प्रकृति, समाज और उद्योग में भली-भाँति होता है।

इसके अतिरिक्त बेसिक शिक्षा में इस बात पर भी ध्यान दिया जाता है कि बालक जो भी ज्ञान प्राप्त करे, वह विभिन्न क्रियाओं (Activities) के आधार पर प्राप्त करे। इसमें शिक्षा इस प्रकार दी जाती है कि ज्ञान (Knowledge) और कार्य (Activity) में परस्पर समन्वय (Correlation) बना रहे। गणित विभिन्न क्रियाओं और उनसे उत्पन्न ज्ञानों के जोड़ने में बड़ा उपयोगी है। जिस प्रकार भवन-निर्माण में गारा एक ईंट को दूसरी ईंट से जोड़ने में सहायक होता है, उसी प्रकार गणित भी विभिन्न

क्रियाओं और ज्ञान के जोड़ने में सहायक होता है। इसलिए बेसिक शिक्षा में गणित की उपयोगिता को समझकर पाठ्यक्रम में इसका समावेश (Include) किया जाय।

बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाने का उद्देश्य

बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाने का उद्देश्य विद्यार्थियों को इस योग्य बनाना है कि वे अपने उद्योग को तथा घरेलू व सामाजिक जीवन के सम्बन्ध में आने वाले हिसाब-किताब की नाप-तोल की समस्याओं को शीघ्रता से हल कर सकें। अतः बेसिक शिक्षा में गणित के व्यावहारिक तथा सांस्कृतिक मूल्य पर अधिक जोर दिया जाता है। गणित के अनुशासनात्मक (Disciplinary) मूल्य पर बिल्कुल ध्यान नहीं दिया जाता है।

अतः अध्यापक को बेसिक शिक्षा में गणित पढ़ाते समय निम्नलिखित उद्देश्यों को ध्यान में रखना चाहिए–

(1) बालक को दैनिक जीवन में काम आने वाले अंकों का भली-भाँति ज्ञान कराना चाहिए।

(2) उद्योग और दैनिक जीवन में उठने वाली अनेक संख्या व ज्यामिति सम्बन्धी समस्याओं को शीघ्रता एवं शुद्धता से हल करने की क्षमता प्राप्त करानी चाहिए।

(3) बालकों को किसी विषय पर स्वयं सोचेन की, एकाग्रचित्त (Concentrate) होने की, उस पर सफल प्रयत्न (Effort) करने तथा उसको शब्दों, संकेतों या चित्रों द्वारा सूक्ष्म में व्यक्त करने के अवसर प्रदान करने चाहिए।

बेसिक शिक्षा में गणित का पाठ्यक्रम

बालक को किसी विशेष परिस्थिति में गणित के जिस ज्ञान की आवश्यकता होती है वही बात उस समय बालक को पढ़ाई जानी चाहिए। ऐसा करने से बालक रुचिपूर्वक गणित के ज्ञान को ग्रहण करता है। इस प्रकार वर्तमान आवश्यकता और बालक की रुचि, बेसिक शिक्षा में गणित का पाठ्यक्रन बनाने के मूल सिद्धान्त हैं।

यह पाठ्यक्रम बड़ा लचीला (Flexible) होता है। इसमें कोर्स की सूक्ष्म रूपरेखा (Outline) दी हुई होती है। अध्यापक पढ़ाते समय उस कोर्स में से आवश्यक तथा बालकों की रुचि के अनुसार किसी भी विषय को चुनने में पूर्ण स्वतन्त्र होते हैं। पाठ्यक्रम में सैद्धान्तिक (Theoretical) और कृत्रिम (Artificial) गणित के लिए कोई स्थान नहीं होता है। इसमें विशेष बल इस बात पर दिया जाता है कि गणित का दैनिक जीवन से सम्बन्ध हो। स्व. डॉ. जाकिर हुसैन ने बेसिक शिक्षा की मूल योजना में बताया था कि बेसिक शिक्षा सैद्धान्तिक अंकों तक ही सीमित न रखी जाय, बल्कि उसका बहुत समीप सम्बन्ध उन व्यावहारिक समस्याओं से होना चाहिए जो बुनियादी कला-कौशल को सीखते समय उत्पन्न होती हैं। इसलिए बेसिक शिक्षा में गणित के पाठ्यक्रम में नीरस (Dry) भिन्नें (Fractions), काम और समय (Work and Time) सम्बन्धी रूखे प्रश्न तथा निरर्थक (Meaningless) बीजगणित के गुणनखण्ड (Factors) आदि को तनिक भी स्थान प्राप्त नहीं है। इसमें उसी गणित को सम्मान प्राप्त है, जो हस्तकला (Handicraft) में सामाजिक तथा मनोरंजक सम्बन्धी क्रियाओं

और व्यावहारिक जीवन में आवश्यक होता है। रचनात्मक रेखागणित (Practical Geometry) पर अधिक जोर दिया जाता है जिससे यह हस्तकला तथा घरेलू कामों में डिजायन और चित्र बनाने में सहायक हो सके। बीजगणित भी वहीं पढ़ाई जाती है जो अंकगणित के प्रश्नों को सरल करने में सहायक हो। बीजगणित के उन समीकरणों को पढ़ाया जाता है जो हस्तकला सम्बन्धी समस्याओं को हल करने में सहायक होते हैं।

बेसिक शिक्षा में गणित के पाठ्यक्रम बनाने में प्रायः गणित को इसके व्यावहारिक कोर्स से पृथक् कर दिया जाता है। पाठ्यक्रम में इसका सीधे तौर पर कोर्स लिख दिया जाता है; जैसे जोड़, बाकी, गुणा, भाग, दशमलव, ऐकिक नियम आदि। इसका प्रभाव यह पड़ता है कि प्रायः अध्यापक बालकों को पढ़ाते समय उस कोर्स को दैनिक जीवन सम्बन्धी समस्याओं से बड़ी कठिनाई से जोड़ पाते हैं। अतः गणित-कोर्स को दैनिक जीवन सम्बन्धी समस्याओं से जोड़ देना चाहिए।

गणित में दैनिक जीवन सम्बन्धी अनेक समस्याएँ हैं, उनमें से कुछ निम्नलिखित हैं–

(क) उद्योग सम्बन्धी–त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग व आयत आदि आकृतियों की क्यारियाँ बनाई जा सकती हैं। जब वे खेतों के लिए बीज व खाद और बिनौले तोलें, उस समय उनको तोल सम्बन्धी इकाइयाँ, जैसे–किलोग्राम, ग्राम इत्यादि के बारे में बताया जा सकता है। खेतों व बागों में क्यारियाँ व मार्ग बनाते समय उनकी भूमि की पैमाइश करना, क्षेत्रफल आदि का निकालना सिखाया जा सकता है। खेत व बाग में उत्पन्न उपज, बुने हुए कपड़े को बिकवा कर उनकी लाभ-हानि (Profit and Loss) तथा व्यवहार-गणित (Practical Mathematics) का ज्ञान कराया जा सकता है। इसी सम्बन्ध में उनकी रसीद-बही, रोकड़-बही, और बैलेंस शीट (Balance Sheet) का ज्ञान भी सहज में हो जायेगा। खेती-बाड़ी में क्यारियाँ बनवाते समय उनको फील्ड-बुक (Field Book) भी सिखायी जा सकती है। वस्त्र बुनते समय उनको गति (Speed), घर्षण (Friction) आदि का भी ज्ञान कराया जा सकता है। बुने हुए वस्त्र पर डिजाइन करवाते समय ज्यामिति की विभिन्न आकृतियों का ज्ञान कराया जा सकता है। रँगवाते समय रंगों के हिसाब का ज्ञान हो जाता है। मिट्टी का मॉडल बनाने में ठोस ज्यामिति की आकृति गोले (Sphere), घन (Cube) आदि का ज्ञान सरलता से दिया जा सकता है। जब वे मिट्टी के ढेलों से काम करेंगे तो उनको गिनती का ज्ञान भी सहज में हो जायेगा। लकड़ी व मिट्टी के खिलौने बनाते समय नाप-तोल, विभिन्न पैमाइशें आदि सिखाई जा सकती हैं। उनको रँगने में रंगों को विभिन्न अनुपात में लाना बताया जा सकता है। इस प्रकार विभिन्न प्रकार के उद्योगों पर विभिन्न प्रकार की गणित शिक्षा दी जा सकती है।

(ख) घर और परिवार सम्बन्धी–खाने-पीने, कपड़े व मकान बनवाने, पढ़ने-लिखने, लेन-देन के सम्बन्ध में उठने वाले हिसाब सम्बन्धी प्रसंगों में अनेक प्रकार से गणित की शिक्षा दी जा सकती है। बालकों के अभिभावकों (Guardians) की आय-कर (Income Tax) के सम्बन्ध में प्रतिशत सम्बन्धी प्रश्न कराये जा सकते हैं। डाकखानों व बैंकों में रुपयों को जमा करने, निकालने और उन पर ब्याज लगाने के प्रसंग में ब्याज सम्बन्धी प्रश्न कराये जा सकते हैं।

(घ) **समाज सम्बन्धी**—स्कूल में सहकारी भण्डार (Co-operative Store) चलाकर बालकों को ब्याज, लाभ-हानि, साझेदारी (Partnership) तथा अंकगणित के अन्य प्रमुख नियम सरलता से बताये जा सकते हैं। स्कूल में हुए उत्सव का हिसाब भी बालकों से कराया जाये। इससे वे लेन-देन, खरीद और खर्च आदि बातों को सरलता से सीख सकते हैं। समाज में शादी, ब्याह, श्राद्ध और अनेक व्यावहारिक एवं सामाजिक कार्यों में लेन-देन, खरीद-बिक्री के प्रसंग में आयी हुई अनेक प्रकार की गणित बालकों को सिखायी जा सकती है।

उपकरण

पाठ्यक्रम को बनाने के बाद गणित के लिए आवश्यक उपकरण और सामग्री का होना भी नितान्त आवश्यक है। इन उपकरणों और सामग्री से गणित का शिक्षण सरल एवं रोचक हो जाता है। इसके अतिरिक्त गणित-शिक्षण में कुछ ऐसी सूक्ष्म बातें आ जाती हैं, जिनका समझना यदि सब छात्रों के लिए नहीं तो कुछ के लिए तो अवश्य ही असम्भव हो जाता है। ऐसी दशा में यदि उपकरण तथा चित्रादि दिखाकर सूक्ष्म बातें स्पष्ट कर दी जाएँ तो उसे बालक शीघ्र ही समझ लेते हैं। ब्लैक-बोर्ड, पॉइण्ट, खल्ली, झाडन के अतिरिक्त ज्योमैट्रीकल सेट, चेन (Chain) और मापने के यन्त्र, जैसे गिनने के सामान, ठोस ज्योमिति के विभिन्न रंगों की नालियाँ, भिन्न-भिन्न ऊँचाई और गहराई वाले सामान, विभिन्न आकृतियों के मॉडल जैसे गोला (Sphere), घन (Cube), आयताकार ठोस (Rectangular Solid), त्रिपार्श्व (Prism) और शंकु (Cone) आदि भिन्न-भिन्न प्रकार के सिक्के, विभिन्न घनत्व (Density) वाले पदार्थ, तोल के विभिन्न प्रकार के बाँट, ग्राफ, चार्ट तथा विभिन्न प्रकार के चित्र व रेखाचित्र आदि आकर्षक ढंग से विद्यालय में सजे हुए होने चाहिए। यह भी बालकों को गणित-शिक्षण का एक साधन है। जहाँ तक हो सके, चित्र हाथ के बने होने चाहिए। इन उपकरणों की सफाई और व्यवस्था का प्रबन्ध भी अध्यापक और बालकों द्वारा होना चाहिए।

विधि

बेसिक शिक्षा में गणित की शिक्षण-पद्धति सीधे तौर पर नियम बताकर प्रश्न निकलवाने की नहीं है, बल्कि सीखने समय जो समस्या खड़ी हो, उसको हल करते हुए गणित सीखना चाहिए; जैसे—किसी बालक ने एक दिन में 40 मीटर सूत काता और दूसरे दिन 35 मीटर। अब इस बात की आवश्यकता होगी कि उसने दोनों दिन में कितने मीटर सूत कांता। इस समय अध्यापक को जोड़ का नियम सिखाने का अच्छा अवसर है। इस प्रकार क्राफ्ट के सम्बन्ध में अनेक समस्याएँ आयेंगी और उनका उपयोग करते हुए गणित का ज्ञान सहज में दिया जा सकेगा। अध्यापक को गणित की शिक्षा देते हुए भी विचार रखना चाहिए कि बेसिक कक्षाओं में बालक बहुत छोटे होते हैं, अतः उनको आगमन प्रणाली (Inductive Method) में पढ़ाना चाहिए; क्योंकि निगमन प्रणाली (Deductive Method) के लिए काफी तर्क और समझ की आवश्यकता होती है।

ऐसा करने से जीवन-सम्बन्धी वास्तविक प्रसंगों के सहारे गणित का शिक्षण हो सकेगा। कभी-कभी बेतुके और असत्य उदाहरण पुस्तकों में दिखायी देते हैं;

जैसे—एक आदमी की उम्र 14 साल है और उसके 3 बच्चे हैं। अब यह सोचने की बात है कि क्या 14 साल के लड़के के 3 बच्चे हो सकते हैं ? इसी प्रकार ऐसे प्रश्न भी दिये जाते हैं, जिनका उत्तर $20\frac{1}{2}$ आदमी आता है। क्या यह सम्भव है कि $20\frac{1}{2}$ आदमी हो सकते हैं ? कभी-कभी ऐसे प्रश्न भी पूछे जाते हैं कि—एक घोड़े के दाम 2 रु. हैं तो 8 घोड़ों के दाम बताओ। क्या एक घोड़ा 2 रु. का हो सकता है ? अतः ऐसे प्रश्नों को बालकों से नहीं करना चाहिए जो कृत्रिम और असत्य हों। इसका बालकों पर बुरा प्रभाव पड़ता है। वे गणित को जीवन से असम्बन्धित समझकर एक अजीब और भयानक विषय समझ बैठते हैं। अध्यापक को चाहिए कि वह बालक से उन्हीं प्रश्नों को कराये जो संख्यात्मक, वर्णनात्मक, खाने-पीने, पहनने-ओढ़ने, खेल-खिलौने आदि से सम्बन्धित तथा मनोरंजक हों। इसके साथ-साथ गणित से सम्बन्ध रखने वाली सामग्री का; जैसे—गिनने के साधन, सिक्के, ज्यॉमैट्रीकल सैट, ठोस ज्योमिति की आकृतियों आदि का भी गणित पढ़ाते समय उपयोग कराना चाहिए। ऐसा करने से बालकों में सहज प्रवृत्ति उत्पन्न होगी। उन्हें गणित में रस मिलेगा। वे गणित में रुचि लेने लगेंगे। उनमें शोध (Research) की प्रवृत्ति जाग्रत होगी और अपनी समस्याओं का हल अपने आप निकालने में समर्थ होंगे।

कभी-कभी अध्यापक एक गलती कर बैठते हैं। वे बालकों को गणित सिखाते समय उनको कुछ गलती करने पर धमकाते हैं, उनको बैंचों पर खड़ा कर देते हैं और उनको पीटते हैं। इसके अतिरिक्त गणित में सूक्ष्म और अबोधगम्य सिद्धान्तों को वे बालकों की उम्र और समझ का बिना विचार किये उन पर लादते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि बालक गणित के प्रति उदासीन हो जाते हैं, और उससे कोसों दूर भागते हैं। रट-रटाकर वे चाहे परीक्षा में उत्तीर्ण हो जाते हैं, परन्तु गणित का वास्तविक उपयोग अपने जीवन में नहीं ले पाते हैं। अतः अध्यापकों को चाहिए कि वे इन गलतियों से सावधान रहें। उनको चाहिए कि वे इस प्रकार के प्रेम का वातावरण बनायें कि बालक निःसंकोच अध्यापक से अपनी शंका का समाधान कर सकें और किसी बात को अध्यापक से पूछने में झिझकें नहीं।

गणित अध्यापक को यह बात भी ध्यान में रखनी चाहिए कि जब तक बालकों की रुचि विषय में रहे तभी तक गणित पढ़ानी चाहिए, क्योंकि अनुकूल परिस्थिति और ठीक समय पर किया हुआ कार्य ही पूर्णरूप से सफल होता है। जिस समय बालक गणित के किसी विषय को पढ़ते-पढ़ते ऊब जायें और उनको पढ़ने में रुचि न रहे, फिर भी अध्यापक गणित के उस पाठ को पढ़ाता रहे तो इसका परिणाम उसी प्रकार होगा जैसा कि बर्तन के भर जाने पर और पानी भरने से होता है। अतः बालकों की जब तक विषय में रुचि बनी रहे तभी तक उनको पढ़ाना चाहिए।

लड़कों में गणित के प्रश्नों को हल करने में शीघ्रता एवं शुद्धता (Speed and Accuracy) हो तथा गणित सम्बन्धी लेखन में कहीं भी किसी तरह की भूल न होने पाये। इसके लिए गणित-कार्य में अभ्यास (Drill) की आवश्यकता है। परन्तु अभ्यास इस प्रकार कराना चाहिए कि बालक उसके करने से ऊबे नहीं। अध्यापक को यह अभ्यास-कार्य खेल-पद्धति (Play-way Method) द्वारा कराना चाहिए। अभ्यास-कार्य में प्रश्न इस ढंग से बालकों के सम्मुख चुनने चाहिए कि बालक उनमें रुचि लेते रहें।

अध्यापक को किसी प्रश्न की लघु विधि (Short cut Method) पर जोर नहीं देना चाहिए, बल्कि उस क्रम से कराना चाहिए जिस क्रम से बालक सोचते हैं। कमजोर बालकों का भी गणित अध्यापक को ध्यान रखना चाहिए। तेज (Intelligent) और कमजोर (Weak) बालकों को यथासम्भव उनकी योग्यतानुसार पढ़ाना चाहिए। कमजोर बालकों को तेज बालकों के साथ लाने के लिए कभी-कभी अध्यापक बहुत जल्दी कर बैठते हैं। ऐसा करने से कमजोर बालक की नींव कमजोर रह जाती है, जो आगे उन्नति में बाधक होती है। अशुद्ध उत्तर आने पर बालकों पर गुस्सा नहीं करना चाहिए बल्कि उनसे सही उत्तर निकलवाने की चेष्टा करनी चाहिए।

पाठ्य-पुस्तक
(TEXT-BOOK)

कुछ लोगों की ऐसी धारणा है कि बेसिक शिक्षा में पाठ्य-पुस्तक की कोई आवश्यकता नहीं होती है। परन्तु यह उनकी बहुत बड़ी भूल है। बेसिक शिक्षा के लिए पुस्तकों का होना अनिवार्य है, परन्तु ये पुस्तकें बेसिक शिक्षा के सिद्धान्त पर लिखी होनी चाहिए। गणित की पाठ्य-पुस्तक में जो प्रश्न दिये जायें, वे जीवन से सम्बन्धित होने चाहिए। प्रश्न वास्तविक हों, उनमें कृत्रिमता की झलक न रहे। प्रश्नों को रखने का ढंग भी क्रमपूर्वक (Systematic) हो, ताकि सरल प्रश्न पहले आयें और फिर अन्त में सबसे कठिन। मौखिक (Oral) तथा मानसिक प्रश्नों का भी समावेश होना चाहिए। गणित की अच्छी पुस्तकों में पुष्टि के लिए कहीं-कहीं चित्र और आकृतियों का होना अनिवार्य है।

7

सहायक सामग्री
[MATERIAL AID]

गणित को भली-भाँति पढ़ाने के लिए सहायक सामग्री (Material Aid) का प्रयोग आवश्यक है, क्योंकि समस्त विचार केवल मौखिक वर्णन द्वारा ही स्पष्ट नहीं हो पाते। सहायक सामग्री के प्रयोग से विद्यार्थियों का ज्ञान निश्चित हो जाता है, क्योंकि मॉडल आदि देख लेने से बालकों को पाठ्य-वस्तु समझने में कोई कठिनाई नहीं होती। ये वस्तुएँ पाठ को रोचक एवं सरल बनाती हैं। बालकों का मन भी पढ़ने में लगा रहता है और वे प्रसन्नतापूर्वक सहज में ही ज्ञान ग्रहण कर लेते हैं। इसके प्रयोग से बालकों की स्मरण-शक्ति तथा निरीक्षण-शक्ति का भी विकास होता है।

गणित-शिक्षण में सहायक सामग्री के रूप में प्रयोग करने वाली वस्तुएँ निम्नलिखित हो सकती हैं—

(1) श्यामपट्ट व चॉक,
(2) प्रत्यक्ष वस्तु व मॉडल,
(3) गणित-सम्बन्धी उपकरण,
(4) चित्र, रेखाचित्र, चार्ट आदि,
(5) गणित का संग्रहालय,
(6) गणित परिषद्,
(7) गणित का पुस्तकालय,
(8) गणित-कक्ष,
(9) सिनेमा फिल्म।

(1) श्यामपट्ट व चॉक (Black-Board and Chalk)—गणित अध्यापक के लिए श्यामपट्ट बड़ी उपयोगी वस्तु है। अंकगणित और बीजगणित के प्रश्नों के हल, रेखागणित के चित्र तथा आँकड़ों के ग्राफ गणित अध्यापक श्यामपट्ट पर लिखकर ही बालकों को बताते हैं। श्यामपट्ट की अनुपस्थिति में गणित का शिक्षण असम्भव है। अतः गणित-कक्ष में काफी बड़ा एक श्यामपट्ट होना चाहिए या उसी श्यामपट्ट के दूसरी ओर ग्राफ के खाने बने होने चाहिए। श्यामपट्ट चिकना और काले रंग से अच्छी तरह पुता होना चाहिए, ताकि उस पर लिखावट ठीक आये। चॉक सफेद और रंगीन दोनों प्रकार की होनी चाहिए। ये चॉक न तो इतनी कठोर होनी चाहिए कि श्यामपट्ट पर लिखने में उस पर निशान बना दें और लिखते समय आवाज करें और न इतनी मुलायम ही होनी चाहिए कि थोड़ी-थोड़ी देर बाद टूट जायें। साधारणतः प्रश्न सफेद चॉक से ही करने चाहिए, परन्तु कुछ विशेष बातों को समझाने के लिए रंगीन चॉकों का प्रयोग करना चाहिए। रंगीन चॉकों के प्रयोग से चित्र सजीव और स्पष्ट हो जाते

हैं। जैसे यदि गणित अध्यापक रेखागणित की किसी आकृति के समान कोणों को बताने के लिए उन्हें रंगीन चॉक से बना देता है तो बालक समान कोणों को सरलता से समझ लेंगे। रंगीन चॉक का प्रयोग चित्र, रेखाचित्र, कोण इत्यादि बनाने में ही करना चाहिए, लिखने में नहीं।

(2) प्रत्यक्ष वस्तु एवं मॉडल (Model)—प्रदर्शन सामग्री में सबसे अधिक महत्त्व प्रत्यक्ष वस्तु का है। प्रत्यक्ष वस्तुओं को देखकर बालकों को तत्सम्बन्धी ज्ञान शीघ्र हो जाता है। उदाहरणार्थ—लीवर पेंच (Screw), घिर्री (Pulley), सिक्के, बाँट, घड़ी और तराजू इत्यादि ऐसी वस्तुएँ हैं जिनको यदि गणित अध्यापक प्रश्नों को हल करते समय आवश्यकतानुसार उपयोग करें तो बालकों को बड़ा लाभ होता है। इसी प्रकार गणित-शिक्षण में मॉडल का भी उपयोग है। ज्यामिति पढ़ाते समय मॉडल की बड़ी आवश्यकता अनुभव होती है। जैसे त्रिभुजों की विभिन्न किस्में पढ़ाते समय उनकी विभिन्न किस्मों के मॉडल दिखाने से बालक बड़ी आसानी से समझ जाते हैं। इसी प्रकार विभिन्न साध्यों को पढ़ाने के लिए विभिन्न प्रकार के मॉडल प्रयोग किये जा सकते हैं। ठोस ज्यामिति (Solid Geometry) में मॉडल की आवश्यकता बहुत अधिक होती है; क्योंकि ये तीन क्षेत्रीय (Three Dimensional) होते हैं। इनको कल्पना मात्र से ही समझना प्रायः कठिन होता है। अतः घन (Cube), पिरामिड (Pyramid), प्रिज्म (Prism), गोले (Spheres), बेलन (Cylinder), शंकु (Cone) आदि के मॉडल कक्षा में दिखा दिये जायें तो बालक शीघ्रता से उनके बारे में ज्ञान प्राप्त कर लेते हैं।

(3) गणित-सम्बन्धी उपकरण—गणित-शिक्षण में श्यामपट्ट और चॉक के अतिरिक्त कुछ अन्य उपकरणों की भी आवश्यकता पड़ती है। जैसे रेखागणित में पढ़ाते समय गणित अध्यापक श्यामपट्ट पर वृत्त (Circle) प्रायः हाथ से बना देते हैं। इस प्रकार बनाया हुआ वृत्त बिल्कुल सही (Correct) नहीं होता है। अतः इस वृत्त से सम्बन्धित जो बात अध्यापक बताना चाहता है, वह इस आकृति से नहीं बता पाता। इसके अतिरिक्त इस अशुद्ध आकृति का बालक पर प्रभाव भी बुरा पड़ता है। अतः गणित अध्यापक को श्यामपट्ट पर परकार (Compass) का प्रयोग करके बिल्कुल सही और स्वच्छ वृत्त बनाना चाहिए। यह परकार बालकों के प्रयोग करने वाली परकार से बड़ी होती है और इसमें पेंसिल के स्थान पर चॉक प्रयोग की जाती है। परकार के अतिरिक्त चाँदा (Protracter), सेट-स्कावायर स्केल, कैंची, कार्ड-बोर्ड तथा तुला (Balance) आदि सभी उपकरणों का गणित अध्यापक को काम पड़ता है। अतः इन उपकरणों का होना परमावश्यक है और गणित अध्यापक को इनका अधिक-से-अधिक प्रयोग करना चाहिए।

(4) चित्र, रेखाचित्र और चार्ट—कभी-कभी कक्षा में चित्र, रेखाचित्र, ग्राफ और चार्ट आदि दिखाने पड़ते हैं। प्राइमरी कक्षाओं के बालकों को गिनती सिखाने के लिए गिनती के चार्ट का प्रयोग करना आवश्यक होता है। मिडिल कक्षाओं में बालकों के भिन्न (Fraction) और क्षेत्रफल (Area) आदि बातों को पढ़ाने के लिए गणित अध्यापक को भिन्न सम्बन्धी चार्ट और क्षेत्रफल सम्बन्धी चार्टों का प्रयोग करना चाहिए। ऊँची कक्षाओं में रेखागणित की साध्यों की उत्पत्ति से सम्बन्ध रखने वाले चार्ट दिखाने चाहिए। रेखागणित और क्षेत्रफल व आयतन (Volume) पढ़ाते समय

रेखाचित्रों का भी बड़ा प्रयोग होना है। यदि रेखागणित की पाइथागोरस साध्य पढ़ाते समय पाइथागोरस का चित्र और बीजगणित में श्रीधराचार्य विधि से गुणनखण्ड करते समय श्रीधराचार्य का चित्र बालकों को दिखाया जाय तो बालकों में विषय के प्रति रुचि बनी रहती है, परन्तु चित्र व चार्टों के दिखाने में यह ध्यान रखना चाहिए कि वे बड़े, स्पष्ट तथा गहरे रंग के होने चाहिए, ताकि प्रत्येक बालक उनको भली-भाँति देख सकें। रेखाचित्र जहाँ तक हो सके घर से बने-बनाये लाने की अपेक्षा बालकों के सामने ही बनाने चाहिए।

(5) गणित का संग्रहालय (Museum)—यदि सम्भव हो सके तो गणित का एक संग्रहालय भी स्थापित होना चाहिए, क्योंकि गणित-शिक्षण में संग्रहालय का एक महत्त्वपूर्ण स्थान है। इससे गणित का शिक्षण सजीव एवं रोचक बनाया जा सकता है। ठोस ज्यामिति की आकृतियों का बालकों को मॉडल आदि दिखाकर सहज में ही ज्ञान कराया जा सकता है। इसके अतिरिक्त बालकों में भी वस्तुओं के संग्रह (Collect) करने की स्वाभाविक प्रवृत्ति होती है। संग्रहालय के द्वारा बालकों की इस प्रवृत्ति को विकसित तथा इसका सदुपयोग किया जा सकता है। इसमें अनेक प्रकार के गणित-सम्बन्धी मॉडल होने चाहिए। इन मॉडलों में कुछ खरीदे भी जा सकते हैं; जैसे—शंकु (Cone), समपार्श्व (Prism), बेलन (Cylinder), आदि के तथा कुछ मॉडल बालकों से भी बनवाये जा सकते हैं। गणित-सम्बन्धी विभिन्न प्रकार की आकृतियों; जैसे—पाइथागोरस, आर्किमिडीज, रामानुजन्, महावीराचार्य, नारायण पण्डित आदि के चित्र (Portraits) तथा मूर्तियों (busts) का भी समावेश होना चाहिए। इसके अतिरिक्त गणित सम्बन्धी उपकरण—परकार, सेट-स्क्वायर, फीता, स्केल, घिर्री का उपकरण (Model of Pulley) आदि तथा गणित-सम्बन्धी मशीनें; जैसे—गणना करने की मशीन (Calculating Machine), क्षेत्रफल ज्ञात करने की मशीन (Plainmeter) आदि संग्रहालय में होनी चाहिए।

(6) गणित परिषद् (Mathematics Association)—गणित के शिक्षण में गणित परिषद् भी बड़ी उपयोगी है। बहुत-सी बातें जो कला-शिक्षण में सम्भव नहीं हैं, वे इनके द्वारा सहज में ही जान ली जाती हैं। गणित परिषद् बालकों को गणित की व्यावहारिक उपयोगिता प्रदान करती है। इसकी उपस्थिति में बालकों को अपने विचार प्रकट करने की शिक्षा प्राप्त करने का अवसर प्राप्त होता है। इसके द्वारा बालक अध्यापक के अधिक सम्पर्क में आते हैं; जिससे बालक और अध्यापक एक-दूसरे को अच्छी तरह समझ लेते हैं तथा बालक भी अध्यापक से कोई बात पूछने में हिचकिचाहट नहीं रखते हैं।

ऐसी परिषद् गणित अध्यापक की देख-रेख में बालकों द्वारा चलायी जानी चाहिए। इसके लिए बालकों में से सभापति, मन्त्री, कोषाध्यक्ष (Treasurer) तथा पुस्तकालयाध्यक्ष चुनने चाहिए। इसके प्रत्येक सदस्य से या तो वार्षिक चन्दा प्रारम्भ में ले लेना चाहिए या फिर माहवारी चन्दा भी लिया जा सकता है। चूँकि गणित अनिवार्य (Compulsory) विषय है, अतः गणित परिषद् की सदस्यता प्रत्येक विद्यार्थी के लिए खुली होनी चाहिए। चाहे कोई भी विद्यार्थी इसका सदस्य हो सकता है। ऐसा करने से परिषद् का आर्थिक लाभ (Financial Gain) भी होगा और साथ ही अधिक-से-अधिक विद्यार्थी इसका उपयोग कर सकेंगे।

परिषद् की बैठक (Meeting) महीने में कम-से-कम एक-दो बार अवश्य होनी चाहिए। इसके लिए पन्द्रह तारीख और महीने की आखिरी तारीख अधिक अच्छी रहेगी। प्रत्येक बैठक में गणित के किसी विषय पर जैसे—किसी गणितज्ञ का जीवन-इतिहास तथा कार्य, गणित-सम्बन्धी खेल, पाइथागोरस साध्य की विभिन्न उपलब्धियाँ (Proofs), गणित का दैनिक जीवन में उपयोग, शून्य की कहानी आदि पर भाषण होने चाहिए। इस पर प्रायः लड़कों को बोलने का अवसर मिलना चाहिए। विषय पहले तय कर लेना चाहिए, इससे बालकों को विषय की तैयारी करने का अवसर मिल जाता है। कभी-कभी बाहर से अन्य कॉलेजों के प्रोफेसरों आदि विद्वानों को बुलाकर उनके भाषण कराने चाहिए। इस परिषद् के अन्तर्गत बालकों से उनकी रुचि के अनुसार गणित के चित्र, रेखाचित्र, चार्ट व मॉडल भी तैयार कराये जा सकते हैं। साल में एक बार गणित प्रदर्शनी (Mathematical Exhibition) का आयोजन भी होना चाहिए। इस प्रदर्शनी में बालकों द्वारा तैयार किये गये चित्र, रेखाचित्र, चार्ट और मॉडल तथा उनके द्वारा इकट्ठा किया गया गणित-सम्बन्धी साहित्य, प्रश्नों को हल करने के नये तरीके, साध्यों को सिद्ध करने की विभिन्न उपपत्तियाँ आदि रखनी चाहिए। ऐसा करने से बालकों का उत्साह बढ़ता है। इसके अतिरिक्त प्रदर्शनी में वह सहायक उपकरण तथा मॉडल आदि भी रखने चाहिए जो अध्यापकों ने अपनी समझ से या कहीं अन्य स्थानों को देखकर अथवा किन्हीं पुस्तकों में पढ़कर बनाये हैं। इन उपकरणों को देखकर बाहर के बालक व गणित अध्यापक लाभ उठा सकेंगे।

(7) गणित का पुस्तकालय (Mathematics Library)—आधुनिक शिक्षा-प्रणाली के अनुसार बालकों को शिक्षा इस प्रकार दी जाती है कि वे नवीन बातों को स्वयं खोजें। अध्यापक का कार्य केवल उनको सही रास्ता दिखाना है। इसके अतिरिक्त गणित अध्यापक के लिए यह सम्भव भी नहीं है कि अध्यापन काल में ही गणित का सारा कोर्स, उसके ऊपर काफी अभ्यास तथा मनोरंजन की दृष्टि से गणित एवं गणितज्ञों का इतिहास तथा गणित-सम्बन्धी पहेलियाँ आदि करा दें। वह तो कक्षा में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करता है। इस कोर्स-सम्बन्धी विषयों पर काफी अभ्यास उसको कक्षा के बाद कराना होता है। इस पर काफी अभ्यास करने के लिए तथा मनोरंजन की दृष्टि से अध्ययन करने के लिए उसे पाठ्य-पुस्तकों के अतिरिक्त अन्य पुस्तकों के अध्ययन की आवश्यकता होती है। इसी दृष्टि से गणित के पुस्तकालय की आवश्यकता होती है। अध्यापकों को भी पढ़ाने के लिए पूर्ण अध्ययन करना पड़ता है। केवल पाठ्य-पुस्तकों की सहायता से वह विद्यार्थियों की सभी आवश्यकताओं को पूर्ण नहीं कर सकता। उसको भी आधुनिक खोजों और नवीन प्रणालियों के सम्पर्क में आना पड़ता है, अतः गणित के पुस्तकालय से गणित अध्यापक को भी सहायता मिलती है।

पुस्तकालय के लिए पुस्तकों को चुनने का काम भी बड़ा महत्त्वपूर्ण होता है। पुस्तकें चुनते समय पुस्तकालय में पढ़ने वालों के स्तर और आयु का ध्यान अवश्य रखना चाहिए। इसमें पढ़ने वाले प्रायः अध्यापक, ऊँची कक्षाओं के बालक तथा छोटी कक्षाओं के बालक भी हो सकते हैं। अतः पुस्तकालय में इन तीनों की आवश्यकता तथा स्तर के अनुसार पुस्तकें होनी चाहिए।

अध्यापकों के विचार से गणित के प्रत्येक विषय पर अनेक लेखकों की पुस्तकें गणित शिक्षण-पद्धति एवं गणित विषय पर वे पुस्तकें जो उनको पढ़ाने में सहायक हों तथा गणित-सम्बन्धी ग्रन्थ होना आवश्यक है। इसके अतिरिक्त गणित-कोष, विश्व-कोष, गणित के इतिहास, गणित संस्थाओं की रिपोर्ट, गणित-सम्बन्धी पत्रिकाएँ, जर्नल्स तथा बुलेटिन्स आदि भी पुस्तकालय में होने चाहिए। ऊँची कक्षाओं के बालकों की दृष्टि से उच्च कोटि के ग्रन्थ, पाठ्य-पुस्तकें, गणित का इतिहास, बड़े-बड़े गणितज्ञों की जीवनी, गणित के चमत्कार, गणित में मनोरंजन, गणित का व्यावहारिक उपयोग तथा गणित की नवीन खोज-सम्बन्धी पुस्तकें होनी चाहिए। छोटी कक्षाओं के बालकों के विचार से पुस्तकें ऐसी होनी चाहिए जिनमें चित्रों की अधिकता हो। इन पुस्तकों में गणितज्ञों की रोचक कहानियाँ और गणित-सम्बन्धी खेल तथा पहेलियाँ आदि होनी चाहिए। छोटी कक्षाओं के लिए पुस्तकों में यह बात अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए कि इनकी छपाई मोटे अक्षरों में हो।

इन पुस्तकों के उपयोग में भी गणित अध्यापक का सहयोग होना चाहिए कि वह बालकों में इन पुस्तकों को पढ़ने को रुचि उत्पन्न करे। उसको कक्षा में ऐसी पुस्तकों की चर्चा करनी चाहिए। कक्षा में पढ़ाते समय उपविषय एवं प्रसंगों के सम्बन्ध में बताना चाहिए कि अमुक बात अमुक पुस्तक में मिलेगी। ऐसा करने से विद्यार्थी पुस्तकालय की पुस्तकों की उपयोगिता समझेंगे और उनसे लाभ उठायेंगे। इसके अतिरिक्त बालकों को उन पुस्तकों की उचित पाठन-विधि से अवगत कराना तथा गणित को उचित रीति से पढ़ने की विधियाँ भी बतानी चाहिए।

गणित के पुस्तकालय के लिए कुछ पुस्तकों के नाम नीचे दिये गये हैं परन्तु यह सूची पूर्ण नहीं है। इसमें अन्य उपयोगी एवं आवश्यक पुस्तकों और ग्रन्थों के नाम बढ़ाये जा सकते हैं।

शिक्षण-पद्धति पुस्तकें	लेखक
1. Teaching of Mathematics	J. W. A. Young
2. The Teaching of Secondary Mathematics	Clouds, H. Brown
3. Teaching of Mathematics in the Secondary Schools	Luncien Blain Binny and C. Richard Purdy
4. The Teaching of Elementry Mathematics.	Godfrey and Siddons
5. The Teaching of Mathematics in the New Education	N. Kuppuswami Aiyanger
6. गणित-शिक्षण	एस. एस. रावत एवं डॉ. एम. बी. लाल अग्रवाल

प्रमुख गणित सम्बन्धी पत्रिकाएँ

1. Mathematics Teacher
2. Bulletin of Calcutta Mathematical Society

गणित के इतिहास एवं मनोरंजन की पुस्तकें

1.	Mathematics for the Million	Lancelot Mobgen
2.	What is Mathematics	Richard Curant & Herbert Palious
3.	History of Mathematics I & II	D. E. Smith
4.	A Short History of Mathematics	W. W. Rouse Ball
5.	A History of Mathematics	Florian Cajori, Ph. D.
6.	An Introduction to the History of Mathematics	Howard Eves
7.	A Primer of the History of Mathematics	W. W. Rouse Ball
8.	A History of Ancient Indian Mathematics	C. N. Shrinivassinger
9.	गणित का इतिहास	डॉ. ब्रजमोहन
10.	हिन्दू गणित का इतिहास (भाग 1, 2, 3)	बी. बी. दत्त एवं ए. ए. सिंह
11.	हिन्दू ज्योतिष का इतिहास	रा. र. खाडिल्यकर
12.	गणित के चमत्कार	रा. र. खाडिल्यकर
13.	गणित सार-संग्रह	महावीराचार्य
14.	गणित का इतिहास	सुधाकर द्विवेदी
15.	Mathematical Recreation and Problems	Ball
16.	Recreation in Mathematics	Vinot
17.	गणित तिलक	सिंह तिलक सूर
18.	त्रिशतिका	श्रीधराचार्य
19.	गणित कौमुदी (भाग 1, 2)	नारायण पण्डित
20.	आर्यभट्टीय	आर्यभट्ट (प्रथम)
21.	लीलावती	भास्कराचार्य (द्वितीय)
22.	गणित की कहानी	शिक्षा भारती, जी. टी. रोड, शाहदरा, दिल्ली-32

(8) गणित-कक्ष (Mathematics Room)—गणित का कमरा गणित के समुचित एवं प्रभावोत्पादक शिक्षण के लिए परम आवश्यक है। पूर्णतः सुसज्जित कमरे के अभाव में गणित पढ़ने के लिए भूगोल, विज्ञान आदि अन्य कक्षाओं से आने पर बालक गणित के वातावरण में नहीं आ पाते। इसके अतिरिक्त गणित पढ़ने में कुछ उपकरणों का भी प्रयोग होता है। गणित-कक्ष के अभाव में उनका उपयोग भी भली-भाँति न हो सकेगा। गणित के सुसज्जित कमरे में विद्यार्थी बहुत-सी बातों से अनायास ही

परिचित हो जाते हैं। अतः अनुकूल वातावरण बनाये रखने और प्रभावपूर्ण गणित शिक्षण के लिए पृथक् कमरा होना अनिवार्य है।

गणित के कमरे में सीटें इस प्रकार लगी होनी चाहिए कि जब लड़के सीटों पर बैठ जायें तो उनको श्यामपट्ट भली-भाँति दिखाई दे। पीछे बैठे हुए लड़कों को देखने में कठिनाई न हो। इन सीटों की ऊँचाई भी लड़कों की नाप के अनुसार होनी चाहिए। इसके अतिरिक्त यदि कोई बालक कमरे में इधर-उधर जाये तो उसके कारण अन्य बालकों को श्यामपट्ट (Black-board) देखने में बाधा न पड़े। प्रकाश और हवा का भी गणित-कक्ष में समुचित प्रबन्ध होना चाहिए। इसके लिए कमरे में दरवाजे, खिड़कियाँ और रोशनदान पर्याप्त संख्या में होने चाहिए। दरवाजों और खिड़कियों पर किवाड़ भी होने चाहिए, ताकि श्यामपट्ट पर चौंध (Reflection) पड़ने पर बन्द किये जा सकें। प्रायः कमरों में फर्नीचर ढीले-ढाले होते हैं, जरा हिलने से कक्षा में आवाज करने लगते हैं जिससे पढ़ने में विघ्न पड़ता है। अतः फर्नीचर फर्श पर स्थिर (Fixed) होना चाहिए, ताकि बालकों के हिलाने-डुलाने से जरा भी न हिले और न आवाज ही करे ताकि पढ़ाई में विघ्न न पड़े। जमीन पर मूँज का फर्श बिछा हो तो और अच्छा है। इससे चलने-फिरने से आवाज कम होगी और बालकों का ध्यान पढ़ने से नहीं हटेगा।

इस कमरे में श्यामपट्ट भी काफी बड़ा होना चाहिए ताकि उस पर पूरा प्रश्न सरलता एवं स्वच्छता से किया जा सके। गणित में प्रायः ग्राफ के प्रश्न भी हल करने होते हैं। अतः साधारण श्यामपट्ट के अतिरिक्त एक ऐसा भी श्यामपट्ट गणित-कक्ष में होना अनिवार्य है जिस पर ग्राफ के खाने बने हों। श्यामपट्ट (Black-board) ऐसी जगह होना चाहिए जहाँ से बालक देख सकें। वहाँ पर्याप्त प्रकाश हो और प्रकाश बायीं ओर से आता हो तथा श्यामपट्ट पर चौंध न पड़ती हो। यदि श्यामपट्ट की स्थिति अच्छी होती है तो बालकों की आँखों पर जोर नहीं पड़ता है और उन्हें पढ़ने में सुविधा होती है। गणित के कमरे में रामानुजन्, श्रीधराचार्य, महावीराचार्य, आर्किमिडीज, न्यूटन, गैलीलियो आदि विख्यात गणितज्ञों के चित्र लगे होने चाहिए। कमरे की दीवारों पर गणित के इतिहास के दृश्य अंकित हों तो और भी अच्छा है। इसके अतिरिक्त बालकों द्वारा तैयार किये गये गणित-सम्बन्धी कुछ रेखाचित्र और अन्य चित्र भी दीवारों पर लगे होने चाहिए। गणित के विकास (Development) के चार्ट आदि भी दीवारों पर लगाये जा सकते हैं।

(9) सिनेमा फिल्म—गणित-शिक्षण में सिनेमा फिल्म का भी महत्त्वपूर्ण स्थान है। फिल्म द्वारा बालकों को रोचक ढंग से गणित का ज्ञान कराया जा सकता है। इसके ऊपर विदेशों में तो प्रयोग किये गये हैं और कई गणित-सम्बन्धी फिल्में बनायी गयी हैं जो अँग्रेजी भाषा में है। इसमें से कुछ ये हैं—

1. Origin of Mathematics—यह फिल्म संख्या और रेखागणित के इतिहास से सम्बन्धित है तथा यह 1921 ई. में H. W. Wilson & Company, New York द्वारा तैयार की गयी थी।

2. Geometry in Action—यह फिल्म जूनियर हाईस्कूल कक्षाओं के लिए, जबकि रेखागणित प्रारम्भ की जाती है, बहुत उपयोगी है। यह Baldeagle Film

Production, 140 Home Street, Amex New Havencourt द्वारा 1940 ई. में तैयार की गयी थी।

3. Ractilinear Co-ordinate इसमें Co-ordinate Geometry का परिचय दिया गया है। यह McCroy Studios New York द्वारा 1929 ई. में तैयार की गयी थी।

4. Slide Rule—इसमें C और D का भली-भाँति वर्णन तथा गुणा-भाग में प्रयोग करने की विधि बतायी गयी है। यह Castle Films, Inc. 30 Rockerfeller के Plaja, New York कम्पनी द्वारा तैयार की गयी है।

5. इसी प्रकार Frequency Curve, Einstein's Theory of Relativity आदि पर भी फिल्में हैं।

परन्तु खेद का विषय है कि भारत में इस प्रकार की फिल्मों की कमी है। यद्यपि भारत सरकार का ध्यान इस ओर आकृष्ट है। उसने बाल-फिल्म प्रतियोगिता भी चलायी थी, जिससे अच्छे फिल्म-निर्माताओं को पुरस्कार भी दिये गये, इससे फिल्म-निर्माता इस ओर ध्यान देने लगे हैं। हमें आशा करनी चाहिए कि निकट भविष्य में इस प्रकार की फिल्में तैयार होंगी और इस कमी को पूरा करेंगी।

दृश्य-श्रव्य सामग्री—गणित शिक्षण हेतु दृश्य-श्रव्य सामग्री का उपयोग किया जाता है। ये निम्नलिखित हैं—

फिल्म स्ट्रिप—फिल्म स्ट्रिप भी दृष्टि-सहायक की भाँति प्रयोग किये जाते हैं। इनके बचाने के लिए अनेक चित्रों को एक क्रम में लगाया जाता है। इनको प्रोजेक्ट की सहायता से दिखाना भी सरल कार्य है। इनको दिखाने के लिए प्रोजेक्ट प्रयोग किये जाते हैं, वे सस्ते होते हैं और उनसे फिल्म स्ट्रिपों को दिखाना भी सरल होता है। कभी-कभी बड़े प्रोजेक्टरों में फिल्म स्ट्रिपों को दिखलाने के लिए एक अलग भाग बना दिया जाता है। फिल्म स्ट्रिप सरलता से टूटते भी नहीं है। हाँ असावधानी से प्रयोग करने पर वे खराब हो सकते हैं। फिल्म स्ट्रिपों के प्रयोग से सबसे अच्छी बात यह है कि हम केवल उन चित्रों को कक्षा में दिखा सकते हैं, जिन्हें हम उपयोगी समझते हैं, अध्यापक इन स्ट्रिपों से पहले परिचित भी हो सकता है। कुछ अध्यापक स्वयं फोटो खींचकर फिल्म स्ट्रिप तैयार कर सकते हैं और उन्हें कक्षा में दिखा सकते हैं।

रेडियो—रेडियो से गणित सम्बन्धी अनेक समाचार प्राप्त किये जा सकते हैं। भारतीय आकाशवाणी के विभिन्न केन्द्र विद्यार्थियों के लिए अनेक प्रोग्राम ब्राडकास्ट करता है। रेडियो का प्रोग्राम अखबारों में पहले ही छप जाता है। अध्यापक को चाहिए कि उस प्रोग्राम के सम्बन्ध में पहले से ही जानकारी प्राप्त कर लें। इस प्रकार रेडियो द्वारा गणित शिक्षण प्रभावशाली तथा सार्थक बनाया जा सकता है।

गणित परिषद्—सामान्यतः गणित को एक कठिन विषय के रूप में जाना जाता है। यह स्थिति नई नहीं है। प्राथमिक स्तर से ही इस विषय के सम्बन्ध में विद्यार्थियों के ऐसे विचार बन जाते हैं। शायद ऐसे ही विचार शिक्षकों और माता-पिता तथा अभिभावकों के भी हैं। दूसरी ओर यह भी स्थिति है कि गणित विषय की ओर विद्यार्थी की संख्या में आकर्षित होते हैं। इस विरोधाभास का प्रमुख कारण यह है कि

गणित को कठिन मानते हुए भी विद्यार्थी इस विषय का चयन इसकी व्यावहारिक उपयोगिता के कारण करते हैं। जीवन में गणित के महत्त्व को सभी समझते हैं। फिर भी इसकी उपयोगिता इसको आकर्षक नहीं बना सकी। गणित प्रतीकों का शास्त्र है। इसमें सूक्ष्म तत्त्वों की प्रधानता है। गणित में विद्यार्थियों को मनोरंजन सामग्री बहुत कम मिलती है। अतः गणित में विद्यार्थियों की अभिरुचि बढ़ाने के लिए इसमें मनोरंजन को सम्मिलित किया जाना आवश्यक है। इससे इसकी सूक्ष्मता से होने वाली कठिनाई को कम करना सम्भव है। मनोरंजन हेतु उपयुक्त और औपचारिक संगठन गणित परिषद् की आवश्यकता पड़ती है। विश्व भर में सभी क्षेत्रों में अवकाश के सदुपयोग और मनोरंजन के लिए क्लबों को बनाया जाता है। अतः गणित विषय को अधिक रुचिकर बनाने के लिए माध्यमिक स्तर पर गणित क्लब का गठन किया जाना चाहिए। क्लब स्वयं तो गणित में अभिरुचि की वृद्धि और उसका अनुरक्षण करता है।

गणित-परिषद् के द्वारा गणित अध्ययन को बल और उद्दीपन प्रदान किये जाते हैं। इसकी सदस्यता स्वैच्छिक होती है। इसलिए इसमें वही विद्यार्थी शामिल होते हैं, जो कि वास्तव में गणित में रुचि रखते हैं तथा विषय का वह स्वरूप जानना चाहते हैं, जो कि कक्षा कार्य से भिन्न होता है। गणित परिषद् में होने वाले आयोजन किसी औपचारिक क्रमिक व्यवस्था का अनुसरण नहीं करते। इनमें उन आयोजनों को अवसर दिये जाते हैं, जोकि उसके सदस्यों की चाह के अनुरूप हों। माध्यमिक स्तर के विद्यार्थी परस्पर मिल-जुलकर रहना चाहते हैं। वे मानसिक, सामाजिक, पारिवारिक सम्बन्धों की पृष्ठभूमि में एक-दूसरे पर आश्रित रहते हैं वे अपने विचार दूसरों को सुनाना चाहते हैं तथा दूसरों के विचारों को सुनना चाहते हैं। वे दूसरों की आलोचना का आनन्द लेते हैं तो अपनी आलोचना को भी सुनना चाहते हैं। गणित-परिषद् ऐसा आदर्श मंच प्रदान करता है, जिसमें गणितीय विचारों का स्वतन्त्र आदान-प्रदान हो सकता है। इसमें गणितीय विचारों की स्पष्ट समालोचना के अवसर मिलते हैं। गणित-परिषद् ऐसा अनौपचारिक, सामाजिक वातावरण उपलब्ध कराता है, जैसाकि नियमित कक्षा में सम्भव नहीं हो सकता। इसमें स्वतन्त्र सामाजिक अन्तर्क्रिया के लिए पर्याप्त अवसर मिलते हैं।

■■

8

गणित-शिक्षण में सह-सम्बन्ध

[CORRELATION IN TEACHING OF MATHEMATICS]

पढ़ाने में सुविधा के लिए समस्त ज्ञान को कई भागों में विभाजित कर दिया गया है। प्रत्येक भाषा को 'विषय' कहते हैं; जैसे—भूगोल, गणित, विज्ञान आदि। पढ़ाते समय भी इन विषयों को एक-दूसरे से सम्बन्धित करके पढ़ाया जाता है तो बालक पढ़ने में रुचि लेने लगते हैं और उससे लाभ उठाते हैं। विभिन्न विषयों के इस प्रकार के पारस्परिक सम्बन्ध को **'सह-सम्बन्ध'** (Correlation) कहते हैं।

गणित-शिक्षण में भी सह-सम्बन्ध आवश्यक है। इससे बालक गणित शीघ्रता से समझने लगते हैं। इसका कारण यह है कि मस्तिष्क भिन्न-भिन्न अनुभवों को पारस्परिक सम्बन्ध, तुलना और मिश्रण आदि करके ग्रहण करता है और सह-सम्बन्ध द्वारा ये सब बातें सम्भव हो जाती हैं। अतः बालक का मस्तिष्क सह-सम्बन्ध द्वारा पढ़ाने से शीघ्रता, से ग्रहण कर लेता है। गणित के शिक्षण में सह-सम्बन्ध करने से बालक के व्यक्तित्व का भी विकास होता है। इसके अतिरिक्त पाठ्यक्रम में अनेक विषय होने से बालक को कुछ घबराहट होती है और शिक्षक के अध्यापन में कुछ कृत्रिमता आ जाती है, परन्तु सह-सम्बन्ध से यह दोष भी दूर हो जाता है।

सह-सम्बन्ध की किस्में (Kinds of Correlation)

सह-सम्बन्ध चार प्रकार का होता है—

(1) **गणित की विभिन्न शाखाओं में सह-सम्बन्ध**—गणित-शिक्षण में गणित की विभिन्न शाखाओं—अंकगणित, रेखागणित और बीजगणित में अधिक-से-अधिक सह-सम्बन्ध स्थापित करना परम आवश्यक है। अंकगणित के लाभ-हानि, ब्याज, क्षेत्रफल के कठिन प्रश्नों को बीजगणित की सहायता से बड़ी सरलता से हल किया जा सकता है। बीजगणित के लघुत्तम तथा महत्तम समापवर्त्तक (L. C. M. and H. C. F.) भिन्नों, (Fractions), वर्गमूल (Square Root) आदि में अंकगणित के ही कायदे लगते हैं। अंकगणित में क्षेत्रफल व आयतन पढ़ाते समय इनको रेखागणित से सम्बन्धित किया जा सकता है। इसी प्रकार अंकगणित की अनेक क्रियाएँ—जोड़, बाकी, वर्गमूल, ऐकिक नियम आदि के प्रश्न, रेखागणित द्वारा भी हल किये जा सकते हैं। बीजगणित के सूत्र $(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2$ और $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

आदि रेखागणित द्वारा भी सिद्ध किये जा सकते हैं। बीजगणित की वर्गात्मक समीकरण (Quadratic Equation) को रेखागणित द्वारा भी हल कर सकते हैं। बीजगणित के युगपत् समीकरण (Stimulaneous Equations) को ग्राफ द्वारा भी हल कर सकते हैं। इस प्रकार अंकगणित, रेखागणित ग्राफ आदि का आपस में सम्बन्ध स्थापित करते हुए गणित का शिक्षण होना चाहिए—

(2) **गणित के किसी विषय के विभिन्न पाठों का आपस में सह-सम्बन्ध**—गणित के किसी विषय के विभिन्न पाठों में यथासम्भव सम्बन्ध जोड़ने का प्रयत्न करना चाहिए; जैसे अंकगणित में भिन्नों के जोड़-बाकी का सम्बन्ध प्रतिशत से जोड़ा जा सकता है। इसी प्रकार बीजगणित के समीकरण हल करने में संक्षेप करना (Simplification), भिन्नों का सरल करना, खण्ड करना और कोष्ठक तोड़ना आदि क्रियाओं का काम पड़ता है। रेखागणित पढ़ाते समय भी त्रिभुज की रचना में सरल रेखा खींचने का प्रयोग और चतुर्भुज की रचना में त्रिभुज की रचना का प्रयोग होता है। साध्यों (Theorems) के सिद्ध करने में पहले साध्यों की उपपत्ति आगे की साध्यों में प्रयोग होती है। इस प्रकार विभिन्न पाठों में सम्बन्ध स्थापित करते हुए पढ़ाने में बालकों को विषय सरल होने के साथ-साथ रोचक भी हो जाता है।

(3) **गणित का अन्य विषय से सह-सम्बन्ध**—इस प्रकार का सह-सम्बन्ध दो प्रकार का होता है—(i) प्रासंगिक और (ii) व्यवस्थित।

(i) **प्रासंगिक सह-सम्बन्ध** में दैनिक शिक्षण को अधिक रोचक और व्यापक बनाने के लिए आवश्यकतानुसार अन्य विषयों में पढ़ी हुई बातों का प्रयोग किया जाता है जिससे पाठ समझने में बड़ी सहायता मिलती है। इस प्रकार के सह-सम्बन्ध के लिए शिक्षक कोई पूर्व-व्यवस्था नहीं करता, वरन् पढ़ाते समय किसी भी बात को अधिक व्यापक दृष्टि से सरल बनाने के लिए दूसरे विषयों में गणित सामग्री का प्रयोग कर लेता है।

(ii) **व्यवस्थित सह-सम्बन्ध** में विभिन्न विषयों की सामग्री को ऐसे क्रम में चुनते हैं कि एक विषय के शिक्षण से अन्य विषयों का निकट का सम्बन्ध रहे। जो सामग्री एक विषय में पायी जाती है, उसी का थोड़ा या बहुत अन्य विषयों में प्रयोग हो। इसके लिए शिक्षक पहले से व्यवस्था करता है।

विज्ञान और गणित

विज्ञान और गणित का बड़ा घनिष्ठ सम्बन्ध है। प्रायः यह कहा जाता है कि गणित, विज्ञान के हाथ-पैर हैं। बिना गणित के विज्ञान की शिक्षा अधूरी रहती है। विज्ञान में प्रयोग द्वारा प्राप्त निरीक्षणों से कोई निष्कर्ष निकालने में गणित अत्यन्त आवश्यक है। गोलीय धरातल (Spherical Surface) से प्रकाश के परावर्तन (Reflection) और वर्तन (Refraction) आदि गोले सम्बन्धी गणित का ही उपयोग होता है। इसी प्रकार प्रकाश-सम्बन्धी अनेक सिद्धान्त सिद्ध करने के लिए गणित की आवश्यकता होती है। गति (Speed), त्वरण (Acceleration), अश्व शक्ति (Horse Power), आँकड़े का ग्राफ आदि गणित के विषय होते हुए भी विज्ञान के अन्तर्गत आते हैं। ऊँची कक्षाओं में तो विज्ञान का बहुत कुछ ज्ञान गणित में ही पढ़ाया जाता है। जैसे बी. एस-सी. कक्षाओं में हाइड्रोस्टेटिक्स (Hydrostatics) पढ़ायी जाती है।

हाइड्रोस्टेटिक्स में घनत्व, आपेक्षिक घनत्व आदि विषय ही हैं जो विज्ञान के विषय हैं। इसी प्रकार एम. एस-सी. कक्षाओं में गणित में हाइड्रोमैकेनिक्स तथा ज्योतिष (Astronomy) पढ़ायी जाती है। ज्योतिष में भी प्रकाश का वर्तन, परावर्तन आदि विज्ञान की अनेक बातें होती हैं। इसी प्रकार भौतिक विज्ञान तथा रसायन विज्ञान आदि विषयों में भी गणित का बड़ा उपयोग होता है। इस तरह विज्ञान और गणित में बड़ा गहरा सम्बन्ध है।

भूगोल और गणित

पैमाने के अनुसार रेखाचित्र बनाना, दो स्थानों के बीच की दूरी नापना, नदियों और नहरों की लम्बाई बताना, पहाड़ों और तालाबों की ऊँचाई व गहराई की चर्चा करना, किसी स्थान की जनसंख्या (Population) आदि भूगोल और गणित दोनों के अन्तर्गत आते हैं। क्षेत्रफल सम्बन्धी ज्ञान, सेण्टीमीटर में वर्षा, अंश में तापमान (Temperature), आँकड़ों में ग्राफ आदि के विषय होते हुए भी भूगोल में आते हैं। भूगोल के बहुत-से प्रश्न रेखागणित की सहायता के बिना सिद्ध नहीं किये जा सकते हैं। पृथ्वी का आकार (Shape), इसका मानचित्र समतल पर बनाना, पृथ्वी की गतियाँ और उसका प्रभाव आदि ऐसी बहुत-सी बातें हैं, जो बिना रेखागणित की सहायता से ठीक-ठीक समझ में नहीं आ सकतीं। अक्षांश और देशान्तर (Latitudes and Longitudes) से दूरी, प्रामाणिक तथा स्थानीय समय (Standard and Local Time) निकालने में गणित का ही काम पड़ता है। अतः गणित अध्यापकों को भूगोल की इन सब बातों का ज्ञान होना जरूरी है। उनको गणित पढ़ाते समय इनसे सम्बन्ध जोड़ने का सफल प्रयत्न करना चाहिए।

ड्राइंग और गणित

ड्राइंग और हस्तकला का सम्बन्ध भी गणित से बड़ी सरलता से जोड़ा जा सकता है। गणित में रेखागणित और ठोस ज्यामिति (Solid Geometry) की आकृतियाँ, क्षेत्रफल, आयतन व फील्ड-बुक के रेखाचित्र और आँकड़ों के ग्राफ आदि बनाने का बहुत काम पड़ता है और चित्रों व आकृतियों की सुन्दरता ड्राइंग खींचने की पटुता पर ही निर्भर है। अतः गणित पढ़ाते समय ड्राइंग की ओर भी ध्यान देना चाहिए तथा बालकों को सुन्दर तथा स्वच्छ रेखाचित्र व आकृतियों के लिए उत्साहित करते रहना चाहिए। इसके अतिरिक्त ड्राइंग में ज्यामिति और ठोस ज्यामिति का भी काम पड़ता है। इनके बनाने का ज्ञान भी गणित पढ़ाते समय दिया जा सकता है। ड्राइंग में रचनात्मक ज्यामिति (Practical Geometry) भी पढ़ायी जाती है। जिस बालक को ज्यामिति का अच्छा ज्ञान नहीं होता है तो वह ड्राइंग में भी निपुण नहीं होता है। इस प्रकार ड्राइंग और गणित में घनिष्ठ सम्बन्ध है।

इतिहास और गणित

इतिहास पढ़ाते समय पाइथागोरस, न्यूटन, रामानुज आदि गणितज्ञों का इतिहास बताकर और किसी उपविषय के अन्वेषण का इतिहास सुनाकर गणित को रोचक बनाया जा सकता है। इसलिए गणित अध्यापकों को गणितज्ञ के जीवन-विषय की कहानी और गणित के इतिहास का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए।

भाषा और गणित

प्रायः बालक समझा करते हैं कि गणित में भाषा की व्याकरणीय अशुद्धि (Grammatical Mistake) कोई अशुद्धि नहीं है, परन्तु ऐसा समझना उनकी भूल है। गणित ही नहीं वरन् सभी विषय जिनसे मनुष्य के जीवन का सम्बन्ध है, साहित्यमय हैं। उनमें भाषा की अशुद्धि उतनी ही दोषयुक्त है जितनी की साहित्य में। अतः गणित अध्यापक को बालकों की गणित क्रिया में भाषा पर भी ध्यान देना चाहिए। गणित में भाषा का ठीक प्रयोग न करने से बालक की तर्क-शक्ति पर बुरा प्रभाव पड़ता है और उनकी क्रिया से उसे अशुद्धता की झलक प्रतीत होती है। छोटी कक्षाओं के बालकों का शब्द-संग्रह थोड़ा होता है। वे अपने भाव को भली-भाँति व्यक्त नहीं कर पाते। गणित अध्यापकों को चाहिए कि बालकों में गणित-सम्बन्धी शब्दों का भण्डार बढ़ाएँ तथा गणित पढ़ाते हुए उनकी भाव-व्यंजना (Expressing Power) को सुदृढ़ बनाएँ। इसके अतिरिक्त प्राचीन गणित तो श्लोकों के रूप में ही प्राप्त होता है, जैसे—भिन्न तोड़ने के लिए—

का, भाग, गुणा, जोड़ और बाकी।
पाँच बात याद हैं, भिन्न न गलती ताकी।।

इसलिए भाषा और गणित में सह-सम्बन्ध आवश्यक है।

(4) पाठशाला का बाह्य जगत से सम्बन्ध—गणित-शिक्षण का उद्देश्य बालकों को आगामी जीवन के लिए तैयार करना होता है। इसके लिए उनको व्यावहारिक वातावरण और बाह्य जगत से परिचित होना अति आवश्यक है। अतः गणित पढ़ाते समय अध्यापक को पाठ का सम्बन्ध स्कूल से बाहर की वस्तुओं से करा देना चाहिए। उनको गणित में ऐसे प्रश्न दिये जाने चाहिए जो वास्तव में उनके जीवन में आते हैं। जैसे अपने यहाँ पौण्ड, शिलिंग और पैंस के सिक्के प्रचलित नहीं हैं, अतः पौण्ड, शिलिंग और पैंस पर प्रश्न न बनाकर रुपये और पैसों से सम्बन्धित प्रश्नों का बनाना अधिक अच्छा होगा। इस प्रकार तौल के लिए टन, हण्डरवेट, पौण्ड आदि की बजाय किलोग्राम, हैक्टोग्राम, ग्राम आदि पर प्रश्न बनाना अच्छा होगा। अंकगणित को अधिक व्यावहारिक बनाने के लिए अध्यापक की देखरेख में स्कूल में एक दुकान का आयोजन होना चाहिए जिसमें सब काम बालक ही करें। स्कूल में एक बैंक भी खोली जा सकती है। स्कूल का सहकारी भण्डार (Co-operative Store) भी बालक को व्यावहारिक गणित पढ़ाने में सहायक होता है।

बाह्य जगत से सम्बन्ध जोड़ने के लिए गणित अध्यापक को चाहिए कि वह बालकों को बाहर मैदान में ले जायें और वहाँ जाकर बालकों से उसकी पैमाइश कराएँ। मैदान में ले जाकर एक 'बैडमिण्टन कोर्ट' बनवा सकते हैं और इस बनाये गये कोर्ट का क्षेत्रफल ज्ञात करवा सकते हैं। दरवाजों और चौखटों की लम्बाई व चौड़ाई नपवायें और उनसे कोण नपवायें। उनसे यन्त्रों की सहायता से बिल्डिंग की ऊँचाई ज्ञात करवा सकते हैं। दरवाजों पर रंग करवाने और दीवारों पर पुताई करवाने का खर्च मालूम करवाया जा सकता है। विद्यालय में छात्रों की उपस्थिति, पुस्तकालय की पुस्तकों को प्रयोग करने वाले छात्रों की संख्या तथा प्रति वर्ष विभिन्न कक्षाओं में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों की संख्या आदि की गणना भी करवायी जा सकती है। ऐसा करने से उनके गणित के ज्ञान का बाह्य जगत से शीघ्र सम्बन्ध

स्थापित होता है और बड़े होकर इंजीनियर और ओवरसियर बनने पर यह ज्ञान उपयोगी होता है।

सामान्यतया सह-सम्बन्ध को अधिक उपयोगी बनाने हेतु शिक्षाशास्त्रियों का यह विचार है कि प्राथमिक (Primary) तथा जूनियर कक्षाओं में प्रत्येक कक्षा केवल एक शिक्षक के अधिकार में हो और वही शिक्षक सभी विषयों का शिक्षण करे, इससे उसको यह अनुभव होगा कि एक विषय में प्रयोग होने वाली पाठ्य-वस्तु किस प्रकार दूसरे विषय को समझने में सहायक हो सकती है। चूँकि एक ही शिक्षक सभी विषयों का अध्ययन तथा अध्यापन करता है तो अलग-अलग शिक्षकों की अपेक्षा वह सही सह-सम्बन्ध स्थापित कर सकता है। ज्ञान वास्तव में टुकड़ों में न होकर सम्पूर्ण में होता है इसलिए बालक विषयों को भली-भाँति समझ सकता है। उच्च कक्षाओं में जहाँ तक सम्भव हो प्रत्येक विषय के शिक्षक को अन्य विषयों को पढ़ाने वाले शिक्षकों से विषय सम्बन्धी ज्ञान तथा सम्बन्ध हेतु समय-समय पर मिलते रहना चाहिए।

■■

9

गणित में शीघ्रता एवं शुद्धता

[SPEED AND ACCURACY IN MATHEMATICS]

शुद्धता एवं शीघ्रता का महत्त्व

बालकों में शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालना गणित में बहुत ही आवश्यक है। कोई भी विद्यार्थी चाहे वह गणित में कितना ही योग्य क्यों न हो, वह प्रश्नों को शुद्धता एवं शीघ्रता से नहीं कर सकता तो वह सफल विद्यार्थी नहीं माना जा सकता। इतना ही नहीं, बल्कि वह अपने आगामी जीवन में भी सफल नहीं होता। उदाहरणार्थ, कोई विद्यार्थी गणित की योग्यता प्राप्त करने के बाद बड़े होने पर कपड़े का व्यवसाय (Business) करता है। इसमें उसको गणित की योग्यता का बहुत काम पड़ेगा। कोई ग्राहक कपड़ा लेता है तब दुकानदार को कपड़े के भाव की दर से कुल खरीदे हुए कपड़े के पैसे बताने पड़ते हैं और ठीक प्रकार से गिनना पड़ता है। यदि उस दुकानदार में शुद्धता तथा शीघ्रता की आदत नहीं है तो वह ग्राहक को दाम बताने में बहुत देर लगाएगा और गलत भी बताएगा। इस प्रकार उसका व्यवसाय कभी सफल नहीं हो सकता है। अतः संख्यात्मक गणना में शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत बालक में अवश्य डालनी चाहिए।

शुद्धता एवं शीघ्रता की कमी के कारण

बालक में अशुद्धता की आदत अध्यापक की थोड़ी लापरवाही से आती है। आरम्भ में तो बालक नासमझ होता है, वह अनेक अशुद्धियाँ भी करता है। यह अध्यापक का काम है कि उसमें शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डाले। यदि अध्यापक लापरवाह होते हैं तो वे बालकों की अशुद्धियों पर ध्यान नहीं देते। प्रायः देखा जाता है कि बालक प्रश्न गलत करने पर कह देते हैं कि "साहब, यह गलती भूल से हो गयी है।" इस पर अध्यापक उनकी गलती छोड़ देते हैं और आगे बढ़ जाते हैं। यहाँ पर अध्यापकों का कर्त्तव्य है कि वे उनकी भूल समझें और लड़कों द्वारा प्रश्न को फिर से सही ढंग से हल कराएँ। इसी प्रकार प्रायः बालक यह भी कह देते हैं, "अमुक प्रश्न को मैं भली-भाँति जानता हूँ, इसके करने में बहुत समय लगेगा। इस प्रश्न को रहने दीजिये, मैं अगला प्रश्न किये देता हूँ।" लापरवाह अध्यापक उनको ऐसा कर लेने देते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि उनमें प्रश्नों को शुद्धता एवं शीघ्रता से हल करने की आदत नहीं पड़ पाती है।

बालकों में शुद्धता एवं प्रश्न को देर में करने की आदत इस कारण भी आती है कि प्रश्नों के जोड़, बाकी, गुणा, भाग आदि हाशिए (Margin) पर शुद्धता से नहीं करते, बल्कि वे उनके पीछे के पृष्ठों पर अथवा बेकार कागजों पर करते हैं और वह भी बड़े बेढंगेपन से। इसका फल यह होता है कि इस जोड़ इत्यादि से हल को यथार्थ प्रश्न में उतारने में अधिक समय भी लगता है और उतारने में गलती होने की सम्भावना भी रहती है। कभी-कभी गन्दा लिखने तथा एक अंक के ऊपर दूसरा अंक लिखने से भी अशुद्धि हो जाती है। अतः प्रत्येक विद्यार्थी को साफ-साफ लिखने की आदत डालनी चाहिए तथा यदि कोई संख्या गलत लिख जाय तो उसे काटकर अलग सही संख्या लिखनी चाहिए, यह नहीं कि उसे ठीक बनाने की चेष्टा की जाय।

शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालने की अवस्था

अब प्रश्न उठता है कि शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा विद्यार्थियों को किस अवस्था में दी जाय ? इसके लिए ठीक-ठीक आयु बताना तो मनोवैज्ञानिकों का काम है, परन्तु प्रो. सिड्डन के कथनानुसार यदि 9 अथवा 10 वर्ष की आयु का बालक गणना में गलती करता हो और प्रश्न हल करने में देर लगाता हो तो शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा को आगे के लिए स्थगित न करना चाहिए बल्कि उसी समय अध्यापक को यह शिक्षा आरम्भ कर देनी चाहिए।

शुद्धता एवं शीघ्रता की शिक्षा—प्रोफेसर कुप्पूस्वामी आयंगर के अनुसार शुद्धता एवं शीघ्रता की आदत डालने की सबसे उत्तम विधि यह है कि बालकों को काफी अधिक मात्रा में प्रश्न हल करने का अभ्यास दिया जाय। साथ-ही-साथ उनको उन सिद्धान्तों को भी समझा देना चाहिए जिनको उन्हें प्रयोग में लाना पड़ता है। अब प्रश्न उठता है कि यह अभ्यास मौखिक हो अथवा लिखित, इसके बारे में कुछ विद्वानों की राय है कि अभ्यास अधिक मात्रा में मौखिक ही होना चाहिए। अधिक लिखित अभ्यास से बालकों में थकान आती है और समय भी अधिक लगता है। परन्तु फिर भी थोड़ा-सा लिखित अभ्यास भी होना जरूरी है, यद्यपि मुख्यतः अभ्यास मौखिक ही होना चाहिए। मौखिक अभ्यास में अध्यापक को दो बातें अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए। पहले तो यह कि दस वर्ष से अधिक उम्र वाले बालक को अँगुली पर गिनने दिया जाय और दूसरी बात यह है कि अंकगणित के घण्टे के शुरू में पाँच मिनट और कभी-कभी अन्त में भी पाँच मिनट मौखिक अभ्यास हो। अधिक अभ्यास की आवश्यकता नहीं है। यह कार्यक्रम तब तक जारी रखना चाहिए जब तक बालक में शुद्धता एवं शीघ्रता की काफी अच्छी आदत न पड़ जाय।

शुद्धता प्राप्ति के उपाय

नीचे कुछ ऐसी बातें बतायी गयी हैं, जिनका अभ्यास कराने से बालक शुद्धता प्राप्त कर सकते हैं। अतः अध्यापक को इन बातों का प्रतिदिन अभ्यास कराना चाहिए—

(1) अंक बड़े और सुन्दर लिखे जायें। जब तक अंक स्पष्ट एवं सुन्दर नहीं लिखे जायेंगे तब तक वे सफलतापूर्वक नहीं पढ़े जायेंगे और उनमें शुद्धता भी नहीं आयेगी। इसके अतिरिक्त उनको यथास्थान न लिखने में भी भूल होगी, जैसाकि आगे के प्रश्न में दिखाया गया है।

736
204
2944
1472
149964

इसके लिए आवश्यक होगा कि सुलेख के पाठ में अंकों के लिखने का अभ्यास कराया जाय।

(2) बालक से पुस्तक या श्यामपट्ट से अंक उतारने के लिए कहा जाय, क्योंकि कभी-कभी उतारने में भी बालक भूल कर जाते हैं। वे 73 की जगह 37, 307 की जगह 370 आदि उतार लिया करते हैं। उसी के अनुसार क्रिया द्वारा अशुद्ध उत्तर निकालते हैं। निरीक्षण के समय वास्तविक उत्तर न मिलने पर उन्हें अपनी गलती मालूम होगी और वे भविष्य में उतारने की अशुद्धि न करने की चेष्टा करेंगे।

(3) फल या उत्तर की जाँच करायी जाय। मोटे अन्दाज या किसी गुरु के अनुसार उत्तर की जाँच करने पर बालकों को शुद्ध उत्तर का ज्ञान हो जायेगा। यदि उत्तर अशुद्ध हो तो उसे शुद्ध करने की चेष्टा करेंगे।

(4) प्रश्न को ध्यानपूर्वक पढ़ने, निर्दिष्ट और करणीय (Give and to find) को अलग-अलग करने की आदत डाली जाय। बालक उतावली से कई अशुद्धियाँ कर जाते हैं, उनको यह बताने की आवश्यकता है कि प्रश्नों के खण्ड किस प्रकार करने चाहिए।

(5) विचार शुद्ध तथा संक्षिप्त भाषा में प्रकट किये जायें।

(6) साधारण क्रियाओं तथा नियमों पर मौखिक अभ्यास कराया जाये। यह अभ्यास इतना हो कि उसके फल कण्ठाग्र हो जायें और विचार करने की आवश्यकता न रहे।

शीघ्रता प्राप्ति के उपाय

(1) शुद्धता की वृद्धि की जाये। यद्यपि यह ठीक है कि शुद्ध रूप में कार्य करने वाला सर्वदा शीघ्रता प्राप्त नहीं कर सकता तो भी अशुद्ध क्रिया करने वाले से इस विषय में वह अधिक सफलता प्राप्त कर सकता है, क्योंकि अशुद्ध क्रिया से अधिकांश उत्तर अशुद्ध ही निकलने की आशंका रहती है। जाँच के पश्चात्, यदि उत्तर अशुद्ध प्रतीत हुआ तो उसे दुबारा क्रिया करनी पड़ती है। शुद्ध क्रिया करने वाले को यह अवसर बहुत कम मिलता है।

(2) प्रत्येक कार्य के लिए समय निर्धारित किया जाये। बहुत-से बालक इसलिए शीघ्रता से कार्य नहीं करते कि अध्यापक उनको एक प्रश्न हल करने को देता है। जब लड़के उसे हल कर लेते हैं तब उन्हें दूसरा दिया जाता है। बालकों को यह ज्ञान नहीं होता कि उन्हें इस प्रश्न पर कितना समय व्यतीत करना है इसलिए आवश्यक होगा कि समयानुसार 4 या 5 प्रश्न श्यामपट्ट या पुस्तकों में से हल करने को कहा जाय। यह समय बालकों की योग्यतानुसार निश्चित किया जाना चाहिए।

(3) सहायक साधनों का प्रयोग कम किया जाये। यद्यपि प्रारम्भ में सहायक साधनों का प्रयोग करने से क्रिया में सहायता मिलती है, परन्तु क्रिया समझ में आ

जाने पर इससे गति में बाधा पहुँचती है। इसलिए शीघ्रता प्राप्ति के लिए इसका प्रयोग न करना आवश्यक है।

(4) भाषा की संक्षिप्तता तथा अंकों की न्यूनता पर ध्यान दिया जाये। जब बालक क्रिया को समझ जायें तो आवश्यकता से अधिक सोपान क्रिया में न दर्शाये जायें और न निर्दिष्ट और करणीय में ही अलग-अलग रखे जायें। जैसे—

प्रश्न—एक नगर की जनसंख्या 1,45,000 है। इसमें 55 प्रतिशत ब्राह्मण हैं। यदि ब्राह्मणों में 20% खेती करते हैं तो खेती करने वालों की संख्या बताओ।

लम्बी क्रिया

1,45,000
.55
7250
79750 ब्राह्मण
20
15950 खेतिहर **उत्तर**

संक्षिप्त क्रिया

खेतिहर ब्राह्मणों की संख्या

$= 1,45,000 \times \frac{55}{100} \times \frac{20}{100}$

$= 15950$ **उत्तर**

(5) योग्यतानुसार कार्य निश्चित किया जाय। सम्पूर्ण कक्षा की योग्यतानुसार टोलियाँ बना ली जायें और प्रत्येक टोली का समय निर्धारित किया जाये जो उस टोली के चतुर बालक की योग्यतानुकूल हो।

(6) क्रिया में संक्षिप्त रीति काम में लायी जाये। आरम्भ में लम्बी क्रिया द्वारा नियम निकलवाकर अभ्यास कराया जाये। जब बालक उसके सिद्धान्त को ठीक प्रकार समझ जायें तो क्रियाओं को छोटा रूप दे दिया जाये।

(7) आवश्यक आदतें डाली जायें। बालक सोच-विचार में जितना अधिक समय देगा उतनी शीघ्रता की आदत नष्ट होती जायेगी। इसलिए डाली हुई आदतों के आधार पर इस प्रकार कार्य कराया जाये कि क्रियाओं में अधिक सोच-विचार की आवश्यकता न पड़े। बालक एक यन्त्र की भाँति कार्य करे। आदतें निम्न प्रकार की होती हैं—

विषय-सम्बन्धित आदत—गुना और जोड़ के पहाड़े, पैमाने—जाँच की संक्षिप्त विधियाँ, भिन्नों का प्रतिशत रूप आदि कण्ठस्थ करायी जायें।

क्रियात्मक आदत—क्रमपूर्वक लिखना, उत्तर का मोटा अन्दाज करना किसी 'गुरु' के अनुसार उसको सिद्ध करना, प्रश्न को निर्दिष्ट करना और करणीय दो भागों में विभक्त करना। अंकों को स्वच्छ और स्पष्ट लिखना आदि।

मानसिक आदत—यह आदत है कि जिसके द्वारा शुद्धता की भावना, एकाग्रता तथा तर्क-शक्ति का अभ्यास बालकों को होता है जो गणित में उन्नति प्राप्त करने का प्रधान साधन है।

शुद्धता एवं शीघ्रता—दोनों को समान रूप में प्राप्त करना कठिन होता है। परन्तु इन दोनों के प्राप्त करने में स्थायी अभ्यास का विशेष प्रभाव होता है। इस तरह शुद्धता एवं शीघ्रता प्राप्ति के लिए अभ्यास कुछ समय तक चलता रहना चाहिए जिससे उसका प्रभाव पूर्णरूप से स्थायी हो जाए।

■■

10

गणित में मानसिक, मौखिक तथा लिखित कार्य

[MENTAL, ORAL AND WRITTEN WORK IN MATHEMATICS]

मानसिक गणित
(MENTAL MATHEMATICS)

मानसिक गणित का आशय उस प्रकार के गणित से है जिसमें कलम तथा कागज की आवश्यकता नहीं होती। यद्यपि मौखिक (Oral) गणित और मानसिक गणित लगभग एक-सी ही क्रियाएँ हैं, परन्तु फिर भी इनमें कुछ सीमा तक अन्तर है मौखिक गणित साधारण श्रेणी का होता है। मौखिक गणित द्वारा केवल गणित सम्बन्धी प्रत्ययों का निर्माण किया जाता है। परन्तु मानसिक गणित द्वारा केवल गणित सम्बन्धी प्रत्ययों का निर्माण किया जाता है। परन्तु मानसिक गणित द्वारा बालकों में इतनी योग्यता उत्पन्न करने का प्रयत्न किया जाता है कि वे प्रश्नों को मन में ही हल कर लें।

जहाँ तक हो सके, बालकों को इस स्तर पर पहुँचना चाहिए कि वह गणित के प्रश्नों को मन में ही निकालें। उनको कागज-पेंसिल की सहायता सिर्फ वहीं लेनी चाहिए जहाँ बिना कागज-पेंसिल की सहायता के प्रश्न करना सम्भव नहीं हो। मानसिक गणित ही व्यापारिक जीवन में उपयोगी होता है। यह लिखित गणित में भी सहायक होता है। इससे बालकों में प्रश्नों को शीघ्रता से हल करने की आदत पड़ती है। स्मरण-शक्ति की वृद्धि के साथ-साथ चित्त की एकाग्रता भी बढ़ती है। कमजोर छात्रों की कठिनाइयाँ भी मानसिक गणित से पर्याप्त सीमा तक दूर हो जाती हैं। अतः गणित के सफल शिक्षण के लिए मानसिक गणित बालकों के लिए परमावश्यक है।

(1) **मानसिक अंकगणित** (Mental Arithmetic)—अंकगणित के अध्ययन में किसी नये नियम को सिखाते समय मानसिक अंकगणित बड़ा उपयोगी होता है। इसके प्रयोग से बालक अपना मस्तिष्क विषय की ओर पूर्णरूप से एकाग्र कर लेता है। इसलिए मानसिक अंकगणित भी वास्तविक अंकगणित का ही अंग है, इससे पृथक् नहीं। दूसरे शब्दों में, कहा जा सकता है कि मानसिक अंकगणित वास्तविक

अंकगणित ही है, क्योंकि अंकगणित का शिक्षण बिना मानसिक अंकगणित के सम्भव नहीं है। मनोविज्ञान और सांस्कृतिक विचारधारा के अनुसार ही मानसिक अंकगणित लिखित अंकगणित से पहले पढ़ाना परमावश्यक है, क्योंकि इससे यथार्थता, शुद्धता, आत्म-विश्वास और शीघ्रता का विकास होता है। गणित-शिक्षण के विचार से भी मानसिक अंकगणित का शिक्षण में प्रमुख स्थान होना चाहिए। क्योंकि मानसिक अंकगणित से बालकों को संख्यात्मक एवं परिणाम-सम्बन्धी राशियों पर विचार करने का अवसर प्राप्त होता है जो गणित के विकास के लिए आवश्यक है। इसलिए अंकगणित के शिक्षण में मानसिक अंकगणित का प्रयोग अवश्य करना चाहिए।

(2) मानसिक बीजगणित (Mental Algebra)—बीजगणित के अध्ययन में बीजगणित के सूत्रों (Formulae) का बहुत काम पड़ता है। इन सूत्रों की सहायता से बीजगणित के कठिन-से-कठिन तथा लम्बे प्रश्न सरलता से हल कर लिये जाते हैं। इन सूत्रों का अधिक-से-अधिक प्रयोग ही मानसिक बीजगणित है। आजकल ऐसी एक धारणा चल गयी है कि प्रश्न यथासम्भव सूक्ष्म रूप से किये जायें और प्रश्नों को सूक्ष्म रूप में करना केवल मानसिक बीजगणित द्वारा ही सम्भव है। मानसिक बीजगणित का उद्देश्य बालकों में अधिक सोचने, सूत्रों को प्रयोग करने और बिना पेंसिल कागज के प्रश्न हल करने की योग्यता बढ़ाना है। अतः बीजगणित पढ़ाते समय मानसिक बीजगणित का भरसक अभ्यास कराना चाहिए।

(3) मानसिक रेखाचित्र (Mental Geometry)—रेखागणित की शिक्षा तो बिल्कुल ही मानसिक गणित है। यद्यपि अंकगणित और बीजगणित में ऐसा हो सकता है कि अध्यापक एक नियम के प्रश्न बालकों को बता दें और बालक वैसे ही प्रश्नों को बिना दिमाग लगाए उस नियम के आधार पर हल कर लें परन्तु रेखागणित में तो कदम-कदम पर विचार करना पड़ता है। इसके अतिरिक्त बालकों को रेखागणित में साध्यों (Theorems) के अभ्यास (Exercises) करने पड़ते हैं। उसमें बालक को अपना दिमाग लगाना पड़ता है। यदि साध्य पढ़ने के बाद उस पर आश्रित अभ्यास बालक स्वयं हल कर लेता है तो वह गणित का अच्छा छात्र होता है और आगे चलकर वह एक विद्वान बनता है। रचनात्मक रेखागणित (Practical Geometry) में भी आकृतियों की रचना करने में बालकों को पूर्णरूप से मानसिक व्यायाम करना पड़ता है। अतः गणित अध्यापक को रेखागणित पढ़ाने में मानसिक रेखागणित का प्रयोग करना चाहिए।

मानसिक गणित के लिए कोई पृथक् से उपयुक्त पुस्तक नहीं है। अतः अध्यापक को स्वयं इस ओर ध्यान देना चाहिए। उसको स्वयं ऐसे प्रश्न बनाने चाहिए जिससे बालकों को मानसिक गणित का काफी अभ्यास मिल सके।

मौखिक गणित
(ORAL MATHEMATICS)

मौखिक गणित, गणित विषय का बहुत ही आवश्यक अंग है। परन्तु स्कूलों में इसे या तो बिल्कुल ही छोड़ दिया जाता है या उचित स्थान नहीं दिया जाता। यही कारण है कि लिखकर बालक प्रश्नों को बड़ी शीघ्रता तथा शुद्धता के साथ हल कर लेते हैं। परन्तु जब उनकी आयु के अनुसार मौखिक प्रश्न दिये जाते हैं तो बालक

कलम व कागज की सहायता लेने दौड़ते हैं। इसमें बालकों का कोई दोष नहीं है, क्योंकि उनको यही बताया जाता है कि लिखित गणित ही सब कुछ है, मौखिक गणित का शिक्षा में कोई स्थान नहीं है। परन्तु आजकल की शिक्षा-प्रगति को देखते हुए हमें दृष्टिकोण बदलना चाहिए। मौखिक गणित के महत्त्व को समझकर उसे पाठ्यक्रम में उपयुक्त स्थान देना चाहिए। हम जो लिखित गणित को ही सब कुछ समझ बैठे हैं, उसे भूल जायें। कहने का तात्पर्य यह है कि लिखित गणित तथा मौखिक गणित—दोनों को अपना-अपना उपयुक्त स्थान प्राप्त होना चाहिए। किसी भी शिक्षा में किसी प्रकार की भी कमी न रहनी चाहिए।

साधारणतः यह कल्पना कर ली जाती है कि मौखिक गणित तथा लिखित गणित, गणित के दो भिन्न-भिन्न भाग हैं। यही कारण है कि अध्यापक सर्वप्रथम लिखित कार्य कराते हैं ओर उसके पश्चात् मौखिक गणित। ऐसा करना ठीक नहीं। वास्तविकता तो यह है कि मौखिक गणित तथा लिखित गणित का अटूट सम्बन्ध है। दोनों की क्रियाएँ एक हैं। अन्तर केवल यह है कि लिखित गणित में क्रिया कागज पर होती है और मौखिक गणित में क्रिया केवल मस्तिष्क में। यदि हमें किसी प्रश्न को मौखिक निकालना होता है तो कम-से-कम उत्तर लिखने की आवश्यकता तो पड़ती ही है। मौखिक गणित में यदि क्रिया के अंकों को लिखते जाते हैं तो बड़ी सहायता मिलती है। बिना कुछ लिखे मन में लम्बी क्रिया को करना बड़ा कठिन पड़ जाता है।

इसी प्रकार मौखिक गणित भी लिखित गणित में बड़ा सहायक है। यदि हम गणित के लिखित प्रश्नों में सब कुछ लिखकर ही करें तो हमारा काम बड़ा कठिन हो जाता है। उदाहरण के लिए, हमें 97 और 85 को जोड़ना है।

क्रिया—पाँच और सात बारह होते हैं, नौ और आठ सत्रह होते हैं। सत्रह का मान एक-सौ सत्तर है और एक सौ सत्तर में जब बारह जोड़ते हैं तो एक-सौ बयासी हो जाते हैं।

उपर्युक्त क्रिया कितनी लम्बी और भद्दी है। इसमें बहुत कुछ कार्य मौखिक किया जा सकता है। इसकी क्रिया निम्न प्रकार होनी चाहिए—

$$\begin{array}{r} 97 \\ 85 \\ \hline 182 \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त बातों से पता चलता है कि मौखिक तथा लिखित गणित को पृथक् करके पढ़ाना भूल है। अतः गणित के उत्तम शिक्षण में लिखित गणित तथा मौखिक गणित की शिक्षा साथ-साथ होनी चाहिए। लिखित गणित का कोर्स समाप्त करके मौखिक गणित को पढ़ाना बड़ी भारी गलती है। स्मरण-शक्ति की सहायता के लिए कठिन मौखिक गणित को कुछ स्थान मिलना आवश्यक है। इसके विपरीत यदि लिखित गणित में कोई विद्यार्थी बिना लिखे ही कोई बात निकाल लेता है तो उसको प्रोत्साहित करना चाहिए।

गुण (Advantages)—मौखिक कार्य में निम्नलिखित गुण हैं—

(1) इसके द्वारा हर्बार्ट (Herbart) के प्रथम पद का विकास होता है। इसका तात्पर्य नवीन पाठ की प्रस्तावना (Introduction) वाले भाग से है।

पुनरावृत्ति होती है।

(2) इससे पर्याप्त मात्रा में पुनरावृत्ति होती है।

(3) इससे पर्याप्त समय की बचत होती है। इसके द्वारा कक्षा में पढ़ाये गये गणित के नियमों तथा विधियों (Rules and Processes) की उचित परख होती है।

(4) इसके द्वारा कठिनाइयाँ आसानी से दूर हो जाती हैं।

(5) गणित का प्रयोग दैनिक जीवन में इसी के द्वारा होता है।

(6) इससे बालक तीव्र (Quick) तथा शीघ्र समझने वाला (Quick-witted) हो जाता है।

(7) इसका प्रयोग लिखित कार्य के बीच में गलती पकड़ने हेतु किया जाता है, जैसे–8.193 और 6.9 को गुणा करना है तो मौखिक रूप में $8 \times 7 = 56$ के लगभग गुणनफल आना चाहिए। इस तरह उत्तर लगभग 56 लिखा जा सकता है।

(8) यदि बालक मौखिक गणित में निपुण होता है तो वह लिखित गणित को विश्वास और धैर्य के साथ करता है। इससे उसका लिखित कार्य शीघ्र हो जाता है और बालक को विश्वास रहता है कि उसकी क्रिया ठीक है।

(9) मौखिक गणित का क्रमानुसार यदि काफी अभ्यास कराया जाये तो बालकों में निश्चयता का भाव आ जाता है जो लिखित गणित के वश का नहीं है।

(10) नया नियम सिखाते समय बालकों को मौखिक अभ्यास अधिक कराने से वे नियम स्वयं निकाल लेते हैं और इस प्रकार निकाला हुआ नियम उनके मस्तिष्क में स्थायी हो जाता है।

(11) मौखिक गणित से समय की भी बचत होती है तथा लिखित काम कम हो जाने से बालक को आराम मिलता है।

दोष (Demerits)–मौखिक कार्य में निम्नलिखित दोष हैं–

(1) कभी-कभी बालक बिना समझे निष्कर्ष पर पहुँच जाते हैं।

(2) इसमें युक्तिपूर्ण (Logical) तथा यथाक्रम (Systematic) हल सम्भव नहीं है।

मौखिक कार्य करने में निम्न आवश्यक बातों को ध्यान में रखना चाहिए–

(1) प्रारम्भ में मौखिक कार्य का आधार बालक का ज्ञान होना चाहिए।

(2) अन्त में मौखिक कार्य बालक ने किसी निश्चित समय में कितना सीखा है, उसकी परीक्षा हेतु होना चाहिए।

(3) मौखिक कार्य में प्रश्न साधारण (Simple), क्रमानुसार यथाक्रम (Systematic), उनकी शब्दावली उपयुक्त, उपयुक्त क्रम में (Graded), निश्चित (Definite), स्पष्ट होने चाहिए तथा उनका सम्बन्ध बालकों की आवश्यकता से होना चाहिए।

(4) इसके प्रस्तुत करने में यह ध्यान होना चाहिए कि बालक पूर्णरूप से व्यस्त रहें। अध्यापक को प्रसन्नचित्त होना चाहिए तथा उसकी वाणी में शक्ति तथा बल होना चाहिए।

(5) मौखिक कार्य समान रूप से बाँटना चाहिए जिससे सम्पूर्ण कक्षा का ध्यान अध्यापक की ओर हो और कमजोर बच्चों को प्रेरणा मिले।

(6) जहाँ तक सम्भव हो, मौखिक कार्य में चिन्ह (Symbol) तथा दशमलव कार्य (Decimal work) का प्रयोग कम किया जाय तथा निम्न कक्षाओं में इसका प्रयोग बिल्कुल न किया जाय।

(7) इस कार्य में यह भी ध्यान रखा जाय कि शीघ्र ही अध्यापक किसी निष्कर्ष (Conclusion) पर न पहुँच जाय।

(8) प्रतिदिन मौखिक गणित थोडा-बहुत कराया जाय और यथासम्भव लिखित गणित में जहाँ मौखिक गणित की आवश्यकता हो, इसकी सहायता ली जाय।

कक्षा में मौखिक कार्य का महत्त्व तथा उपयोग (Importance and Use of Oral Work in the Class)

(1) इसके आधार पर विद्यार्थियों के द्वारा की गयी पाठ की तैयारी (Preparation) की परख की जाती है।

(2) इसके द्वारा विद्यार्थी की त्रुटियों (Errors) तथा उसके मिथ्या-बोध (Misunder-standing) का सही ज्ञान होता है।

(3) इसके द्वारा विद्यार्थियों में पाठ्य-वस्तु के वस्तु रुचि (Interest) उत्पन्न की जाती है।

(4) इसमें आवश्यक तथा महत्त्वपूर्ण (Important) बातों पर जोर दिया जा सकता है।

(5) बालकों की दूसरे बालक के मौखिक वर्णन तथा शिक्षण के दृष्टिकोण (Views) को सुनने से भिन्न-भिन्न प्रकार से सोचने की क्रिया का विकास होता है।

(6) कक्षा में बालकों को बातचीत करने का मौका मिलता है। इसके अतिरिक्त बालक ध्यान देने का अभ्यास भी डालते हैं।

मौखिक कार्य में भिन्न प्रकार के प्रश्नों का प्रयोग किया जाता है–

(1) प्रत्यास्मरण (Recall), (2) तुलनात्मक (Comparison), (3) विपरीत (Contrast), (4) जाँच-सम्बन्धी (Evaluation), (5) कारण-सम्बन्धी (Cause), (6) प्रभाव-सम्बन्धी (Effect), (7) उदाहरण (Illustration), (8) वर्गीकरण (Classification), (9) परिभाषा (Definition), (10) हल-सम्बन्धी (Proof), (11) विश्लेषण (Analysis), (12) संश्लेषण (Synthesis), (13) प्रयोग (Application)।

लिखित कार्य
(WRITTEN WORK)

मौखिक कार्य की तरह लिखित कार्य (Written Work) का भी अपना महत्त्व है। लिखित कार्य के लिए मौखिक कार्य अपनी सहायता नहीं दे सकता है, क्योंकि उसकी प्रकृति भिन्न होती है। मौखिक रूप से बहुत-से तथ्यों को याद करना कठिन होता है इसलिए लिखित कार्य की शरण लेनी पड़ती है। केवल लिखित कार्य के आधार पर हम पहले हुई घटनाओं को जान सकते हैं। गणित में जिस स्थान पर प्रश्न के पद में किसी समस्या (Problem) की गणना (Calculation) अधिक होती है, उस स्थिति में हमको लिखित कार्य की सहायता आवश्यक होती है। इसके अतिरिक्त

बड़ी आकृति (Figure) खींचने में भी लिखित कार्य आवश्यक होता है, क्योंकि इस तरह की आकृति को मौखिक रूप से याद करना कठिन होता है।

मनोविज्ञान के विचार से भी लिखित गणित की आवश्यकता है। हम मानते हैं कि हमारे मस्तिष्क में एक समय में एक ही विचार रहता है और अन्य विचार उसके बाहरी भाग में चले जाते हैं। इसलिए जब हम किसी क्रिया को केवल मौखिक ही करते हैं तो क्रिया से सम्बन्धित अन्य विचारों को समय पर याद रखने में कठिनाई होती है तथा आवश्यक परिश्रम करना पड़ता है। इसलिए गणित में लिखित कार्य अत्यन्त आवश्यक है।

गणित में लिखित कार्य निम्न कार्यों (Purposes) की पूर्ति करता है—

(1) विद्यार्थी द्वारा हल किये गये प्रश्नों की सूची का बोध होता है।

(2) जिन पाठों में मौखिक वार्तालाप होता है, उनकी परख (Test) इसके द्वारा की जा सकती है।

इसके द्वारा न केवल अन्तिम (Final) परिणामों का ज्ञान होता है, बल्कि समस्या के बीच में आने वाले पदों तथा परिणामों का भी बोध होता है, जिससे स्मृति (Memory) पर अधिक जोर नहीं लगाना पड़ता।

लिखित कार्य को निम्न रूप दिया जा सकता है—

मानसिक कार्य + लिखने की सामग्री = लिखित कार्य

(Mental Work + Writing Material = Written Work)

लिखित कार्य के गुण (Advantages of Written Work)

(1) इसके द्वारा विचार स्पष्ट होते हैं तथा तर्क (Reasoning) सही होता है।

(2) इसके द्वारा मानसिक (Mental) तथा मौखिक (Oral) कार्य की छाप मस्तिष्क में पड़ती है।

(3) कठिन तथा बड़ी संख्याएँ जिनको मौखिक तथा मानसिक विधि द्वारा हल नहीं कर सकते हैं, उनको लिखित रूप से हल किया जा सकता है।

(4) कठिन तथा जटिल गुणा, भाग आदि कार्य इस विधि द्वारा शीघ्रता तथा आसानी से किये जा सकते हैं।

(5) इस विधि में पाठ्य-वस्तु (Subject-matter) भविष्य के उपयोग हेतु रखी जाती है।

(6) लिखित कार्य के आधार पर किसी विद्यार्थी की तथा सम्पूर्ण कक्षा की उन्नति (Progress) की जाँच की जा सकती है।

(7) जिस समय विद्यार्थी लिखित कार्य में व्यस्त रहते हैं, उस समय शिक्षक को कुछ आराम या अवकाश मिल जाता है।

कक्षा में लिखित कार्य कराते समय निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए—

(1) लिखित कार्य प्रारम्भ करने से पहले आवश्यक निर्देश (Instructions) दे देने चाहिए। ये निर्देश इकाई (Unit), कार्य-शुद्धता (Neatness), समय की अवधि (Time Limit) के बारे में होने चाहिए।

(2) निश्चित कार्य इतना अवश्य हो जिससे कक्षा को सम्पूर्ण अन्तर (Period) में व्यस्त रखा जा सके।

(3) लिखित कार्य ऐसा होना चाहिए जिससे कक्षा के सभी विद्यार्थी उसको कर सकें।

(4) समस्याएँ लिखित कार्य में इस तरह की होनी चाहिए, जिनका सम्बन्ध बालकों के जीवन से हो।

(5) लिखित कार्य में प्रश्न की भाषा साधारण (Simple), स्पष्ट (Clear) तथा निश्चित (Definite) होनी चाहिए।

(6) जहाँ तक सम्भव हो, बालकों की उत्तर-पुस्तिकाओं की जाँच उनके सम्मुख की जाय।

लिखित कार्य की जाँच

लिखित कार्य की जाँच में निम्नलिखित सिद्धान्तों को काम में लाना चाहिए—

(1) कार्य का निरीक्षण शीघ्र हो जाना चाहिए। काम करके और उसकी जाँच के बीच कम-से-कम समय दिया जाना चाहिए।

(2) कोई कार्य ऐसा न छोड़ना चाहिए जिसकी जाँच न हो।

(3) त्रुटियों का सुधार बालकों द्वारा शीघ्र कराना चाहिए।

(4) बालकों द्वारा किया गया सुधार एक बार फिर देखना चाहिए। ऐसा न हो कि बालक लापरवाही की ओर झुक जायें और त्रुटियों के सुधारने को अनावश्यक समझने लगें।

(5) नोट-बुक का कार्य व्यवस्था की दृष्टि से श्यामपट्ट के कार्य से कम महत्त्व का नहीं होना चाहिए।

(6) बालकों में यह आदत पड़ जाय कि वे नियत समय पर अपने कार्य की जाँच करा लें और अपनी त्रुटियों का सुधार भी बार-बार लिखकर कर लें।

(7) अध्यापक अपनी ओर से बालकों के कार्य पर ऐसे नोट लिखें जो बालक को अपना कार्य ठीक करने में उत्साह बढ़ायें।

कच्चा कार्य (Rough Work) तथा गलत कार्य को करने के लिए मना करना चाहिए। निम्न प्रकार की गलती की ओर बालकों का ध्यान आकर्षित करना चाहिए, ताकि भविष्य में वे इस ओर ध्यान दें और ऐसी गलती न करें।

10 व्यक्ति = 4 दिन

1 व्यक्ति = 40 दिन

बालकों को इस प्रकार के प्रश्नों में पूर्ण तथा निश्चित भाषा का प्रयोग करना चाहिए। लिखित कार्य में भाषाओं का मिश्रण नहीं होना चाहिए।

अशुद्धियाँ तथा उनका संशोधन
(MISTAKES AND THEIR CORRECTION)

बालकों की गणित की अशुद्धियों का संशोधन करना बहुत आवश्यक होता है। अध्यापक प्रत्येक अशुद्धि को काटकर उसको सही कर देता है तथा अशुद्धि के स्थान

पर एक नोट भी लिख देता है। इससे बालक को अपनी गलती का ज्ञान हो जाता है और वह उसको सुधारने की कोशिश करता है। परन्तु यदि बालक उस अशुद्धि का संशोधन घर के कार्य में नहीं करता है तो अध्यापक की मेहनत बेकार जाती है। यदि बालक दुबारा उस अशुद्धि को नहीं करता है तब तो अध्यापक का परिश्रम सफल समझा जाता है, वरना नहीं। इस कार्य को इस तरह किया जा सकता है–

कक्षा में कुछ अशुद्धियाँ ऐसी हैं जो कि अधिकतर विद्यार्थी करते हैं। इस प्रकार की अशुद्धियों का संशोधन कक्षा में सभी विद्यार्थियों के सम्मुख किया जाना चाहिए। इस तरह से अधिक संख्या में अशुद्धियों का संशोधन किया जा सकता है, परन्तु अध्यापक को इतना ज्ञान अवश्य होना चाहिए कि कौन-सी अशुद्धियाँ सामान्यतया अधिकतर विद्यार्थी करते हैं और जिनके सुधार में उनकी रुचि है। यदि अशुद्धियाँ सामान्य रुचि की न होंगी तो बालक जिन्होंने अशुद्धियाँ नहीं की हैं अध्यापक के शिक्षण में कोई रुचि नहीं लेंगे तथा उनका समय भी कक्षा में व्यर्थ नष्ट होगा। व्यक्तिगत अशुद्धियों का निवारण छोटे-छोटे समूहों तथा व्यक्तिगत रूप से करना चाहिए। कुछ अशुद्धियाँ अध्यापक द्वारा विद्यार्थी की कापी पर ही दूर की जा सकती हैं। जिस स्थान पर अशुद्धि हो, वहाँ पर 'पूछो' शब्द लिखकर अध्यापक अपनी स्मृति हेतु कक्षा में अशुद्धि के बारे में बालकों को बता सकता है। इस तरह व्यक्तिगत अशुद्धि के लिए कुछ और निशान रखा जा सकता है।

स्कूल में यदि विद्यार्थी किसी एक प्रश्न में गलती करता है तो उस सम्पूर्ण प्रश्न का हल फिर से दोहराया जाता है। इस तरह से प्रश्नों को पूरा दोहराने में अनुशासनीय महत्त्व होता है।

सवालों को हल करने में मुख्य रूप से दो प्रकार की अशुद्धियाँ होती हैं–एक तो सिद्धान्त की और दूसरी जोड़, घटाने आदि की।

प्रथम प्रकार की गलती अधिक हानिकारक होती है, क्योंकि एक बार यदि बालक किसी सिद्धान्त को ठीक प्रकार नहीं समझता है तो इस प्रकार की गलती होने की सदा सम्भावना होती है। इस प्रकार की अशुद्धि को कक्षा में उन सभी बालकों को भली-भाँति समझा देना चाहिए जो कि उक्त सिद्धान्त को ठीक से न समझे हों। अध्यापक को उनकी जाँच हेतु कुछ प्रश्न अभ्यास के लिए तथा गृह-कार्य के लिए दे देने चाहिए। प्रत्येक सिद्धान्त का पूर्ण निवारण होने पर दूसरे सिद्धान्त को कक्षा में बालकों को बताना मनोवैज्ञानिक होता है।

दूसरी प्रकार की अशुद्धि वह है जो कि बालक सवाल सही सिद्धान्त के आधार पर हल करने में जोड़ने, घटाने आदि में करते हैं। इस प्रकार की गलती दो रूपों में पायी जाती है–एक तो वह कि बालक सदा एक ही प्रकार की गलती करे, दूसरी वह जो भूल में किसी पद (Step) में कोई गलती हो जाये। दूसरे प्रकार की गलती भयंकर नहीं होती है। इस तरह भूल से गलती करने के लिए बालकों को चेतावनी देना ही पर्याप्त होता है। परन्तु प्रथम प्रकार की गलती, जो कि बार-बार दोहरायी जाती है, भयंकर होती है। इस प्रकार की गलती की ओर अध्यापक का विशेष ध्यान होना चाहिए। पहले अध्यापक को इस प्रकार की गलती ढूँढ़ लेनी चाहिए और फिर

उसके निवारण हेतु उस प्रकार के प्रश्नों का पूर्णरूप से अभ्यास कराने में उपर्युक्त गलती दूर की जा सकती है। घटाने आदि में जो गलती हो, उसको लिखित तथा मौखिक विधियों से अभ्यास करने पर दूर किया जा सकता है।

अशुद्धियाँ करने के कारण हैं–

(1) किसी नवीन विधि को कक्षा में समझाते समय विद्यार्थी ध्यान नहीं देते हैं।

(2) प्रश्न के हल करने से पहले पर्याप्त संख्या में अभ्यास नहीं कराया जाता है।

(3) किसी विशेष कठिन विधि को बालक ठीक रूप से कक्षा में नहीं समझ पाते हैं।

(4) पिछली कक्षाओं में विषय के सही प्रत्ययों (Concepts) का ज्ञान नहीं हो पाया हो।

■■

11

गणित का पाठ्यक्रम

[CURRICULUM OF MATHEMATICS]

गणित के विस्तृत ज्ञान को एक क्रम से संग्रह करने मात्र का नाम ही 'गणित का पाठ्यक्रम' है। इसकी गणित-शिक्षण में बड़ी उपयोगिता है। यह शिक्षा का वह मार्ग है जिस पर चलकर विद्यार्थी अपने लक्ष्य को प्राप्त करता है। कनिंघम ने इसकी उपयोगिता पर प्रभाव डालते हुए कहा है, "यह कलाकार-रूपी शिक्षक के हाथ में वह साधन है जिससे कि वह अपने पदार्थ-रूपी विद्यार्थी को अपने आदर्श के अनुसार स्कूल में ढाल सके।" इससे पढ़ने वाले सभी बालक निश्चित रूप से यह जान जाते हैं कि उनको नियत अवधि में क्या-क्या पढ़ना है। अध्यापक को भी इससे यह ज्ञात रहता है कि उसे निश्चित समय में क्या-क्या पढ़ाना है। इसी के आधार पर वह वार्षिक कार्यक्रम रखता है, ताकि नियत अवधि में अपने कोर्स को भली-भाँति समाप्त कर सके। परीक्षक (Examiner) के दृष्टिकोण से भी पाठ्यक्रम बहुत उपयोगी है। इससे वे इस बात का अनुमान लगा लेते हैं कि बालकों ने क्या-क्या पढ़ा है और इसी के आधार पर वे परीक्षा प्रश्न-पत्र (Examination Papers) बनाते हैं। इसके अतिरिक्त पाठ्य-पुस्तक के लेखक एवं संकलनकर्ता भी पाठ्यक्रम से जो सहायता एवं मार्गदर्शन पाते हैं, वह भी कम महत्त्व का नहीं। इस प्रकार पाठ्यक्रम से शिक्षा-कार्य में संलग्न सभी व्यक्तियों को सहायता एवं पथ-प्रदर्शन (Guidance) मिलता है।

(1) **बालक के स्तर को ध्यान में रखना**—पाठ्यक्रम तैयार करने में निम्न सिद्धान्तों को ध्यान में रखा जाता है—शिक्षा में बालक का स्थान मुख्य होता है। शिक्षा बालक को देनी होती है। अतः पाठ्यक्रम बनाते समय बालक को ध्यान में अवश्य रखना चाहिए। पाठ्यक्रम बालक के लिए है, बालक पाठ्यक्रम के लिए नहीं है। इसलिए पाठ्यक्रम को बालक के अनुकूल बनाना चाहिए। पाठ्यक्रम का निर्माण इस प्रकार होना चाहिए कि उसमें निश्चित किये हुए पाठ्य-विषय को बालक शीघ्रता से समझ जायें, उनको भली-भाँति ग्रहण कर सकें तथा उस ज्ञान का जीवन में उपयोग कर सकें। इन सब बातों के लिए बालक की आयु, स्तर, अंक समझने की योग्यता आदि बातों पर भी विचार करना चाहिए। प्रायः देखा गया है कि अध्यापक बालकों की योग्यता पर विचार न रखते हुए उनको प्रश्न हल करने को दे देते हैं। जब बालक उनको करता है तो उसे कई प्रश्न कठिन मालूम पड़ते हैं और कुछ में गलतियाँ भी करता है। परिणाम यह होता है कि बालक में गणित के प्रति घृणा

उत्पन्न हो जाती है और वह गणित से दूर भागने की चेष्टा करता है और गणित जैसे उपयोगी विषय से सदा के लिए मुँह मोड़ लेता है। यदि अध्यापक उसकी योग्यता को ध्यान में रखकर प्रश्न देता तो ऐसा क्यों होता। अतः गणित का पाठ्यक्रम बनाते समय बालक की योग्यता को दृष्टि में अवश्य रखना चाहिए।

(2) **पाठ्यक्रम सामाजिक जीवन से सम्बन्धित हो**—गणित के पाठ्यक्रम की रचना करने में विद्यालय के चारों तरफ के वातावरण का भी ध्यान रखना चाहिए। पाठ्यक्रम में उन प्रकरणों का समावेश करना चाहिए जो वहाँ के वातावरण के अनुकूल हों; उदाहरणार्थ—गाँवों के स्कूलों के लिए पाठ्यक्रम में कृषि-सम्बन्धी गणित पर अधिक जोर देना चाहिए। इसी प्रकार लड़के और लड़कियों के लिए पाठ्यक्रम समान नहीं हो सकता। लड़कियों के लिए पाठ्यक्रम में गृह-विज्ञान से सम्बन्ध रखने वाली गणित अधिक होनी चाहिए और लड़कों के पाठ्यक्रम में इंजीनियरिंग इत्यादि से सम्बन्ध रखने वाली गणित का समावेश होना चाहिए।

(3) **गणित-शिक्षण के उद्देश्यों को ध्यान में रखना**—गणित के पाठ्यक्रम के आधार पर ही शिक्षा देकर उद्देश्यों की प्राप्ति करनी होती है। यदि पाठ्यक्रम की रचना करते समय गणित-शिक्षण के उद्देश्यों पर ध्यान नहीं दिया तो उन उद्देश्यों की प्राप्ति किस प्रकार सम्भव है ? अतः पाठ्यक्रम को निश्चित करने में बालक के साथ-साथ गणित-शिक्षण के उद्देश्यों पर ध्यान देना आवश्यक है। इन उद्देश्यों को दो भागों में विभाजित किया जा सकता है—

1. व्यावहारिक उपयोगिता।
2. अच्छी आदतों तथा उच्च विचारों का बनना।

व्यावहारिक उपयोगिता के विचार से गणित का पाठ्यक्रम ऐसा होना चाहिए जिनमें बालक को उन प्रश्नों एवं समस्याओं को हल करने का अवसर मिलना चाहिए जो उसके दैनिक जीवन में आती हैं। प्रायः देखा जाता है कि हाई स्कूल का विद्यार्थी रु० 1.50 प्रति किग्रा से 1 किग्रा 800 ग्राम रुई के दाम बताने में असमर्थ होता है; जबकि एक बिना पढ़ा-लिखा दुकानदार उस रुई के दाम शीघ्र ही बता देता है। इसका मुख्य कारण यह है कि बालकों को व्यावहारिक ज्ञान की शिक्षा नहीं दी जाती है। उनको थोथा ज्ञान दिया जाता है जो वास्तविकता से दूर होता है। उनमें कृत्रिमता झलकती है। बालक भी केवल परीक्षा में पास होने के लिए उसको यन्त्रवत् (Mechanically) रट लेते हैं और परीक्षा में उगलने के बाद रटे हुए ज्ञान को शीघ्र भूल जाते हैं और अपने जीवन में उस ज्ञान का कुछ भी उपयोग नहीं कर पाते। यह दोष पाठ्यक्रम में गणित के व्यावहारिक उपयोग का समावेश करके दूर किया जा सकता है। उसको ऐसा ज्ञान देना है जो उसके आगामी जीवन में उपयोगी हो तथा वर्तमान जीवन से सम्बन्धित हो। दैनिक वातावरण से सम्बन्धित प्रश्न और समस्याएँ बालक में रुचि उत्पन्न करने में भी सहायक होते हैं और इनको बालक कोई अपरिचित चीज न समझ कर सहज में ही ग्रहण कर लेता है। अपरिचित बात एवं तथ्य से बालक चौंकता है तथा देर में समझ पाता है। अतः पाठ्यक्रम में गणित की वे बातें कोर्स में रखनी चाहिए जो आगामी जीवन में उपयोगी हैं तथा उस कोर्स को

इस तरह के प्रश्नों द्वारा कराना चाहिए जो बालकों के दैनिक जीवन में काम आते हैं। उदाहरणार्थ, अंकगणित मे स्टॉक और शेयर, लाभ और हानि, नापना इत्यादि दैनिक जीवन में काम आने वाले विषय है। इसी तरह रेखागणित मे भूमि की नाप, डिजायन आदि दैनिक जीवन से सम्बन्धित विषय हैं।

गणित विषय को जीवन से सम्बन्धित करने के लिए बालक के जीवन पर भी ध्यान देना आवश्यक है। बालक के जीवन के खेल प्रधान होता है, अतः खेल द्वारा गणित के प्रश्नों को हल कराया जा सकता है। इसके लिए गणित के अध्यापक को चाहिए कि वह बालकों के विभिन्न खेलों का अध्ययन करे और ऐसे खेलों को चुने जिनके द्वारा गणित की शिक्षा दी जा सके। इसके लिए गणित में 'खेल-तमाशे' नामक एक पुस्तक भी है। यह पुस्तक श्री महावीर प्रसाद जैन, एम० एस-सी० द्वारा लिखी गयी है तथा इसमें विभिन्न खेल-तमाशों द्वारा गणित की शिक्षा दी गयी है। इसके अतिरिक्त डी० एल० आनन्दन ने भी बालकों के खेल पर पुस्तक लिखी है। इस पुस्तक से भी खेल द्वारा गणित की शिक्षा प्रदान करने में सहायता ली जा सकती है।

जहाँ तक गणित के दूसरे उद्देश्य का प्रश्न है; बालक में गणित से सांस्कृतिक तथा अनुशासनात्मक विकास भी अवश्य होना चाहिए। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए पाठ्यक्रम में उस प्रकार के गणित का समावेश होना चाहिए जो बालक के मस्तिष्क को विकसित करे, उनकी बुद्धि को बढ़ाये, उनमें किसी बात को सोचने-समझने की क्षमता बढ़ाये और किसी भी विषय पर अच्छी तरह तर्क करने की आदत डाले। ऐसी योग्यता प्रायः सोचने की समस्याओं और पहेलियों से बढ़ती है। अतः पाठ्यक्रम में कुछ ऐसी गणित जैसे रेखागणित की साध्य तथा अभ्यास तथा पहेलियाँ आदि भी होनी चाहिए। पाठ्यक्रम में पहेलियाँ आदि के समावेश से गणित में रोचकता भी बढ़ जायेगी। परन्तु सांस्कृतिक तथा अनुशासनात्मक विकास केवल इस प्रकार के गणित से ही सम्भव नहीं है। इसके लिए व्यावहारिक गणित भी आवश्यक है। अनुशासन एवं सांस्कृतिक दृष्टि से गणित का समावेश हाईस्कूल तक की कक्षाओं तक बहुत कम होना चाहिए। इस प्रकार गणित उच्च कक्षाओं के लिए ठीक रहता है और उन्हीं के लिए उपयोगी है जो गणित का उच्च ज्ञान प्राप्त करते हैं। आधे से अधिक बालक हाई स्कूल पास करके व्यवसाय में लग जाते है। अतः हाई स्कूल तक की कक्षाओं में गणित व्यावहारिक उपयोगिता के विचार से अधिक होना चाहिए।

(4) पाठ्यक्रम का प्रत्येक स्तर पर तथा अन्य विषयों से सम्बन्ध—पाठ्यक्रम बनाने में एक महत्त्वपूर्ण सिद्धान्त और है, वह है—शिक्षा में सह-सम्बन्ध (Correlation) अतः इस पर भी विचार कर लेना आवश्यक है। शिक्षा में सह-सम्बन्ध का आशय यह है कि गणित की शिक्षा का अन्य विषयों तथा गणित की विभिन्न शाखाओं और पाठों से भी आपस में सम्बन्ध होना चाहिए। गणित-शिक्षण में गणित का बालकों के वातावरण से सम्बन्ध होना चाहिए। प्रायः छोटी कक्षाओं में अध्यापक बालकों को टन, हण्डरवेट, क्वार्टर, पौण्ड आदि के जोड़, बाकी, गुणा, भाग आदि करवाते हैं परन्तु तौल की यह प्रणाली भारत में काम नहीं आती। अतः वे उनको अपरिचित वस्तु समझते हैं और उनका ज्ञानपूर्ण रूप से नहीं कर पाते। यदि इसके स्थान पर क्विंटल, किलोग्राम आदि के प्रश्न करवाये जायें तो बालक शीघ्रता से समझ लेते हैं और उस

ज्ञान का उपयोग अपने दैनिक जीवन में करते हैं। गणित का अन्य विषयों से भी सम्बन्ध करते हुए पढ़ाने से बालकों की रुचि बढ़ती है और वे उस विषय के ज्ञान के सहारे सहज ही में समझ लेते हैं। अतः भूगोल विज्ञान, ड्राइंग, इतिहास आदि विषयों से सम्बन्धित करते हुए गणित पढ़ाना अच्छा है। इसके अतिरिक्त गणित के विभिन्न पाठों का आपस में तथा गणित के ज्ञान का बाहरी जगत से सम्बन्ध भी ध्यान में रखना चाहिए और इसी के अनुसार पाठ्यक्रम बनाना चाहिए।

(5) पाठ्यक्रम कक्षा के कार्य के अतिरिक्त समय के लिए व्यवस्था—इसके अतिरिक्त पाठ्यक्रम बनाने में गणित का इतिहास, गणितज्ञों की कहानियाँ, नये-नये गणित-सम्बन्धी आविष्कार तथा पहेली और रोचक समस्याओं का भी ध्यान रखना चाहिए। गणित के पाठ्यक्रम में इन बातों का समावेश करने से गणित में सरसता आ जायेगी। आजकल बालक गणित से दूर भागते हैं। गणित के प्रति सदैव उदासीन रहते हैं। गणित पाठ्यक्रम में उपर्युक्त बातों का समावेश करने से ये दृश्य फिर दिखायी न देंगे।

पाठ्यक्रम कमेटी—गणित का पाठ्यक्रम प्रायः शिक्षा विभाग द्वारा बना दिया जाता है। इसके बनाने वाले ऐसे व्यक्ति होते हैं जो उन कक्षाओं के सम्पर्क में नहीं आते हैं। इस प्रकार बालकों की आवश्यकताओं इत्यादि बातों का ध्यान रखे बिना पाठ्यक्रम की रचना की जाती है। बालकों की वास्तविक आवश्यकताओं को अध्यापक ही जानते हैं, क्योंकि वे हर समय सम्पर्क में रहते हैं। अध्यापक बालकों के मनोविज्ञान से परिचित होते हैं। वे अपने अनुभव के आधार पर अनेक सुझाव दे सकते हैं अतः गणित की पाठ्यक्रम कमेटी में गणित के अध्यापक, गणितज्ञ तथा शिक्षा विभाग के अधिकारी—ये सभी व्यक्ति होने चाहिए, तभी पाठ्यक्रम ठीक प्रकार से बन सकता है।

गणित के पाठ्यक्रम के सिद्धान्त तथा प्रवृत्ति

(PRINCIPLES AND TRENDS OF MATHEMATICS CURRICULUM)

(1) गणित के अनुभवों में अविच्छिन्नता (Continuity in Mathematics Experiences)—गणित का पाठ्यक्रम प्राथमिक कक्षाओं से जूनियर तथा हाई स्कूल कक्षाओं तक एक निश्चित क्रम हो। जैसे-जैसे बालक की कक्षा-ऊँची होती जाती है, वैसे-ही-वैसे पाठ्यक्रम भी एक क्रम में विकसित होता जाय। एक स्तर से दूसरे स्तर पर जाने में किसी प्रकार का रिक्त स्थान न हो, प्रत्यय (concepts) सरल से जटिल होते जायें।

(2) विभिन्नता (Diversification)—पाठ्यक्रम इस प्रकार का होना चाहिए कि प्रत्येक स्तर का बालक उससे लाभ उठा सके। स्तर का तात्पर्य यह है कि भिन्न-भिन्न योग्यता (ability), रुचि (interest), अभिरुचि (aptitude), आयु (age) तथा अनुभव (experiences) वाले छात्रों को पाठ्यक्रम से लाभ हो सके।

(3) शिक्षण के उद्देश्यों में परिवर्तन के लिए स्थान (A place for the change in Objectives of teaching)—पातयक्रम द्वारा भिन्न-भिन्न उद्देश्यों की पूर्ति होनी चाहिए। इसमें प्रत्येक स्तर के छात्रों को लाभ होता है। प्रत्यय (concepts) बनने का आधार समस्याओं का हल होना लाभप्रद होगा।

(4) शिक्षण का व्यक्तिकरण (Individualization of teaching)—पाठ्यक्रम में पाठ्य-वस्तुएँ ऐसी हों जिनको प्रत्येक छात्र किसी-न-किसी रूप में प्रयोग में ला सके। पाठ्यक्रम द्वारा सभी छात्र क्रियाशील रहें तथा इसके आधार पर छात्रों की भिन्नता का भी ज्ञान हो सके।

(5) विषयों में सह-सम्बन्ध (Correlation of Subjects)—गणित के अन्तर्गत अंकगणित, बीजगणित, ज्यामिति, ठोस ज्यामिति (Solid Geometry) तथा निर्देशांक ज्यामिति (Co-ordinate Geometry) आते है। पाठ्यक्रम तैयार करते समय उपर्युक्त सभी विषयों के सम्बन्ध का ध्यान आवश्यक है।

(6) गणित की विज्ञान के क्षेत्र में वृद्धि (Increase in the use of Masthematics in Science)—गणित का विज्ञान के क्षेत्र में बड़ा महत्त्व है। इसके बिना विज्ञान में प्रगति सम्भव नहीं है। इसके साथ-ही-साथ गणित के द्वारा ही विज्ञान में मात्रा-सम्बन्धी (Quantitative) ज्ञान हो सकता है। अन्य विद्यालय विषयों से सम्बन्ध का ध्यान रखना चाहिए।

(7) गणित जीवन का एक मार्ग है (Mathematics is a way is life)—गणित का प्रत्येक व्यक्ति के जीवन से घनिष्ठ सम्बन्ध है। इसलिए पाठ्यक्रम तैयार करने में यह बात ध्यान रखनी चाहिए कि उसमें ऐसी सामग्री अवश्य हो जिसका जीवन से सम्बन्ध हो।

(8) पाठ्यक्रम में छात्रों के गणित-सम्बन्धी अभिवृत्ति तथा चातुर्य के विकास हेतु सामग्री हो (Curriculum in Mathematics should include material to develop attitude and skill in Mathematics)—इस प्रकार की समस्याओं का चयन किया जाय जिनके द्वारा छात्रों में अभिवृत्ति तथा चातुर्य पैदा हो सके।

(9) पाठ्यक्रम समान तथा स्थिर न हो बल्कि लचीला हो (Curriculum should not be rigid and uniform but flexible)—पाठ्यक्रम तैयार करने में भिन्न-भिन्न परिस्थितियों को ध्यान में रखा जाय। प्रत्येक वातावरण का ध्यान रखा जाय ताकि भिन्न प्रकार के छात्र उससे लाभ उठा सकें। छात्रों के भविष्य की तैयारी तथा व्यवसायों से सम्बन्धित सामग्री पाठ्यक्रम में उपलब्ध हो।

उपयुक्त पाठ्यक्रम

प्राथमिक कक्षाओं का पाठ्यक्रम—छोटी कक्षाओं में गणित की शिक्षा बालक के स्वयं के अनुभव के आधार पर होनी चाहिए। वह जीवन में हर समय कुछ-न-कुछ करता ही रहता है। अतः इन क्रियाओं के विभिन्न पहलुओं द्वारा गणित का ज्ञान देना चाहिए। छोटे बालकों में जिज्ञासा भी काफी बढ़ जाती है। वह भिन्न-भिन्न बातों के बारे में जानना चाहता है तथा बड़ों से अनेक शंकाओं का समाधान करता रहता है। अतः अध्यापक को बालकों की इस जिज्ञासा का गणित की शिक्षा में ध्यान रखना चाहिए और इसी आधार पर पाठ्यक्रम बनाना चाहिए। इसके अतिरिक्त छोटी कक्षाओं के पाठ्यक्रम में एक बात और ध्यान में रखनी चाहिए, वह यह है कि भारत जैसे निर्धन देश में बहुत से बालक कक्षा 4-5 पास करने के बाद पढ़ना छोड़ देते हैं और

किसी व्यवसाय में लग जाते हैं। अतः पाठ्यक्रम में गणित का ऐसा कोर्स रखना चाहिए जो उनके स्कूल छोड़ने के बाद उनके दैनिक जीवन और व्यवसाय में उपयोगी हो।

उपर्युक्त बातों को ध्यान में रखते हुए प्राथमिक कक्षाओं के पाठ्यक्रम में अंकगणित के अन्तर्गत संख्याओं, साधारण जोड़, बाकी, गुणा, भाग, महाजनी गुरु, किलोग्राम, ग्राम, रुपये, पैसे-सम्बन्धी जोड़, गुणा, बाकी, भाग, लघुत्तम, महत्तम, भिन्न, दशमलव, क्षेत्रफल, काम और समय-सम्बन्धी प्रश्न साधारण ब्याज, लाभ-हानि-सम्बन्धी प्रश्न होने चाहिए। रेखागणित में त्रिभुज, चतुर्भुज आदि विभिन्न आकृतियों का ज्ञान कराना चाहिए।

विभिन्न कक्षाओं का पाठ्यक्रम—इन कक्षाओं के बालकों की रुचियाँ तथा योग्यताएँ और बढ़ जाती हैं तथा विभिन्न बालकों की योग्यताओं में अन्तर भी होता है। अतः इनका पाठ्यक्रम इस प्रकार का होना चाहिए कि उसमें बालकों को अपनी रुचि और योग्यता के अनुसार चुनने की गुंजाइश रहे। इस अवस्था में बालकों की योग्यता इतनी बढ़ जाती है कि वे सूक्ष्म बातों को भी समझने लगते हैं। अतः रेखागणित में साध्यें (Theorems) भी इस अवस्था में बालकों को पढ़ायी जा सकती हैं। बीजगणित का भी प्रारम्भिक ज्ञान दिया जा सकता है।

उपर्युक्त बातों को ध्यान में रखते हुए मिडिल कक्षाओं के बालकों को अंकगणित के ऐकिक नियम, वर्गमूल, अनुपात और समानुपात, प्रतिशत, क्षेत्रफल और ग्राफ इत्यादि पढ़ाया जा सकता है। बीजगणित के चारों नियम—जोड़, बाकी, गुणा, भाग, कोष्ठक तोड़ना तथा समीकरण का ज्ञान कराया जा सकता है। रेखागणित में विभिन्न नापों के त्रिभुजों और चतुर्भुजों की रचना तथा इन पर आधारित साध्य व अभ्यास पढ़ाने चाहिए।

कक्षा 8 का पाठ्यक्रम (उ. प्र.)

अंकगणित (Arithmetics)—मिश्र समानुपात; समानुपाती भाग; घनमूल; आयतन; व्यवहार-गणित; चक्रवृद्धि ब्याज; त्रिभुज और समलम्ब के क्षेत्रफल; खेतों के क्षेत्रफल और आँकड़ों के लेखाचित्र।

बीजगणित (Algebra)—युगपत् समीकरण; युगपत् समीकरण पर इबारती प्रश्न; सूत्र और फलन; लेखाचित्र; संख्या-पद्धति।

रेखागणित (Geometry)—सर्वांगसम त्रिभुज; विषमबाहु त्रिभुज; निर्मेय; समान्तर चतुर्भुज; त्रिभुज की रचना; चतुर्भुजों की रचना, चतुर्भुजों का क्षेत्रफल; पाइथागोरस की प्रमेय तथा बिन्दु-पथ।

हाईस्कूल कक्षाओं का पाठ्यक्रम

हाईस्कूल कक्षाओं तक आने पर बालकों की व्यक्तिगत भिन्नताएँ बहुत हो जाती हैं। कुछ बालक तो हाईस्कूल परीक्षा पास करने के बाद पढ़ना छोड़ देते हैं और किसी व्यवसाय में लगकर पेट पालन करने लगते हैं। कुछ बालक हाईस्कूल परीक्षा पास करने के बाद कॉलेज में गणित की उच्च शिक्षा के लिए प्रवेश लेते हैं और

प्रोफेसर, इंजीनियर इत्यादि बनते हैं। अतः सब दृष्टिकोणों को ध्यान में रखते हुए पाठ्यक्रम की रचना करनी चाहिए। गणित के पाठ्यक्रम में ऐसे भी प्रकरण रखने चाहिए, जो व्यवसाय में उपयोगी हों, रुचिकर हों, ज्यादा कठिन न मालूम पड़ें तथा ऐसे प्रकरण भी होने चाहिए जो गणित की उच्च शिक्षा की तैयारी में सहायक हों।

राज्य के उच्च प्राथमिक एवं माध्यमिक स्तर पर प्रचलित पाठ्यक्रम में से कोई अन्य बिन्दु

उच्च प्राथमिक स्तर (Upper Primary Stage)—इस स्तर पर शिक्षार्थी को वाणिज्यिक गणित, क्षेत्रमाप, विवरणात्मक सांख्यिकी, व्यावहारिक ज्यामिति और प्रारम्भिक बीजगणित के मूल तत्त्वों से सम्बन्धित अवधारणाओं, तथ्यों, सिद्धान्तों आदि के आगे के अभिज्ञान, बोध को अर्जित करना चाहिए। उसको चित्रांक, प्रतिरूप (Model) बनाने और मापन के कौशलों तथा सांख्यिकीय लेखाचित्रों से दत्त को पढ़ने और उसके निर्वचन की योग्यता विकसित करनी चाहिए। उसको समस्याओं के हल में सारणियों तथा संगणकों के उपयोग की प्रवीणता भी विकसित करनी चाहिए।

माध्यमिक स्तर (Secondary Stage)—इस स्तर पर शिक्षार्थी को बीजगणित, ज्यामिति, प्रारम्भिक त्रिकोणमिति और सांख्यिकी से सम्बन्धित अवधारणाओं, प्रतीकों और प्रक्रियाओं का अभिज्ञान और बोध अर्जित करने चाहिए। उसे बीजगणितीय विधि से समस्याओं को हल करने की योग्यता विकसित करनी चाहिए तथा अपने त्रिकोणमिति और सांख्यिकी के अभिज्ञान को साधारण समस्याओं के हल तथा निर्वचन में प्रयुक्त करना चाहिए, जो कि गणित के एक अनुशासन के रूप में अध्ययन के लिए अभीष्ट हैं। उसको आगे संगणकों, सारणियों, गणकों (Calculators) के उपयोग की सुविधा को भी विकसित करना चाहिए।

संशोधित नवीन संस्करण

खण्ड [क]—अंकगणित (Arithematics)

(1) संख्या–पद्धति (Number System)

(2) काम–समय तथा चाल–समय

(Work-Time and Speed-Time)

(3) चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

(4) बैंक जमा पूँजी तथा किस्तों में भुगतान

(Bank Deposits and Payment in Instalments)

खण्ड [ख]—सांख्यिकी (Statistics)

(1) आँकड़ों का वर्गीकरण, सारणीयन तथा बारम्बारता बंटन

(Classification, Tabulation and Frequency Distribution of Data)

(2) सांख्यिकीय आँकड़ों का आलेखी निरूपण

(Graphical Representation of Statistical Data)

(3) केन्द्रीय मापें (Central Measures)

(4) विक्षेपण की मापें (Measues of Dispersion)

खण्ड [ग]—बीजगणित (Algebra)

(1) गुणनखण्ड (Factors)

(2) महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्तक

(Highest Common Factor and Least Common Multiple Factor)

(3) घातांक तथा लघुगणक

(Indices and Logarithms)

(4) एक घातीय तीन अज्ञात राशियों वाले युगपत समीकरण

(Simultaneous Equations of Three Unknown Quantities)

(5) द्विघात बहुपद तथा द्विघात समीकरण

(Quadratic Polynomial and Quadratic Equation)

(6) समुच्चय सिद्धान्त तथा समुच्चय संक्रियाएँ

(Set Theory and set operations)

(7) प्रतिचित्रण (Mapping)

खण्ड [घ]—त्रिकोणमिति (Trigonometry)

(1) वृत्तीय माप तथा त्रिकोणमितीय अनुपात

(Circular Measures and Trigonometrical Ratios)

(2) विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

(Trigonometrical Ratios of Specific Angles)

(3) दो कोणों के योग एवं अन्तर के तथा किसी कोण के अपवर्त्य एवं अपवर्तक के त्रिकोणमितीय अनुपात

(Trigonometrical Ratios of Sum and Difference of Two Angles and Multiples and Sub-Multiples of Angles)

(4) दो कोणों के ज्या तथा कोज्या के गुणन का योग तथा अन्तर के रूप में परिवर्तन

(Product and Sine and Cosine of Angles)

(5) ऊँचाई और दूरी

(Heights and Distances)

■■

12

अभ्यास का महत्त्व

[IMPORTANCE OF DRILL]

प्रत्येक नवीन अध्याय के प्रारम्भ में कुछ छोटे-छोटे प्रश्न अभ्यास के रूप में देने चाहिए। इसके अतिरिक्त नवीन ढंग के प्रश्नों को हल करते समय भी बीच-बीच में अभ्यास के लिए कुछ प्रश्न करा देने चाहिए। जब किसी एक विधि पर विद्यार्थी पूर्ण ज्ञान प्राप्त करे ले तो बीच-बीच में स्मृति की जाँच करने हेतु प्रश्न किये जाने लाभदायक सिद्ध होते हैं और वह ज्ञान सदा स्थायी तथा लाभप्रद होता है। किसी निश्चित अवधि में करायी गयी विधि की जाँच करने के लिए अध्यापक को एक साधारण प्रश्न-पत्र विद्यार्थियों को देते रहना चाहिए। इन प्रश्न-पत्रों से अध्यापक को बालक की स्थिति का ज्ञान हो जाता है तथा इनसे विद्यार्थियों की स्मृति फिर से जाग्रत हो उठती है। साधारण प्रश्न-पत्रों तथा उदाहरणों द्वारा पूर्व अवधि के कार्य को दोहराया जा सकता है।

एक अध्यापक यदि बालक के किये हुए कार्य पर ध्यान नहीं देता है तो इसका तात्पर्य यह है कि अगली कक्षा में बालक को उसे स्वयं नहीं पढ़ाना है। उस अध्यापक का शिक्षण केवल उसी स्तर तक सीमित रहता है। इस दशा में बालक के भविष्य पर वह ध्यान नहीं देता है। इस दशा में सुधार हेतु गणित के प्रमुख अध्यापक को सतर्क रहना चाहिए। उसको यह ध्यान में रखना चाहिए कि गणित के प्रत्येक अध्यापक को नवीन ढंग के प्रश्नों के प्रारम्भ में बालक की परीक्षा ले लेनी चाहिए तथा नवीन प्रश्नों को हल करने के साथ-ही-साथ उस विधि का पर्याप्त रूप से अभ्यास करा लेना चाहिए। जिस विद्यालय में एक ही अध्यापक बालकों को पढ़ाता हो, वहाँ तो यह सम्भव है ही, परन्तु जहाँ बालक एक विद्यालय की पढ़ायी समाप्त करके दूसरे विद्यालय में प्रवेश करते हैं वहाँ अध्यापक अपनी जिम्मेदारी नहीं समझते हैं।

छोटी कक्षाओं में बालकों को बिना किसी नवीन विधि में पूर्ण अभ्यास कराने से पहले ही दूसरी कक्षा में भेज दिया जाता है। इसके कारण ऐसे बालकों की नींव कमजोर पड़ जाती है और नवीन विधि को समझने में बालक कठिनाई प्रतीत करता है। इसलिए अभ्यास का महत्त्व इस स्तर पर भी उतना ही है, जितना कि और स्तरों पर होता है। अध्यापक को नवीन विधियों का प्रयोग करना अच्छा लगता है, परन्तु

इससे बालकों का अहित होता है। उनको किसी नवीन विधि को आरम्भ कराने से पहले पूर्व विधि को पूर्णरूप से समझ लेना आवश्यक होता है। यह तभी सम्भव है जबकि प्रत्येक नवीन विधि के पर्याप्त अभ्यास कक्षा में कराये जायें। स्कूल में ऐसे विद्यार्थी भी होते हैं जो कि उच्च विधि के प्रश्न तो हल कर सकते हैं, परन्तु उसके अन्तर्गत आने वाले साधारण विधि के प्रश्न को हल नहीं कर सकते हैं। इसका एकमात्र कारण उन विधियों में अभ्यास की कमी होती है। इसके कारण विद्यार्थी उन सरल प्रश्नों को पूर्णरूप से नहीं समझ पाते हैं। इस तरह विद्यार्थी जब किसी परीक्षा में बैठते हैं तो वे साधारण प्रश्नों को हल करने में असफल होते हैं और इस असफलता के कारण उनकी रुचि गणित की ओर से हट जाती है। इस तरह वे विद्यार्थी, जो कि गणित के प्रत्येक क्षेत्र में पूर्ण अभ्यास करते हैं उनको सदा सफलता प्राप्त होती है।

उपर्युक्त वर्णन से यह स्पष्ट हो जाता है कि गणित के क्षेत्र में अभ्यास का क्या स्थान है तथा वह क्यों आवश्यक है। अभ्यास का प्रत्येक विषय में अपना स्थान है, परन्तु गणित में यह प्रमुख स्थान रखता है और अति आवश्यक है।

गणित का अभ्यास (Drill in Mathematics) इतना महत्त्वपूर्ण होते हुए भी कुछ कारणों से आँखों में खटकता है। इससे कामचोर (Careless) गणित अध्यापक को बहानेबाजी की खूब गुंजाइश मिल जाती है, जबकि अन्य विषयों के अध्यापक गला फाड़ते-फाड़ते थक जाते हैं। गणित अध्यापक अपने अभ्यास-कार्य की छाया में चैन की बंशी बजाया करते हैं। इसकी आड़ में काम नहीं होता है। इस कारण अभ्यास-पद्धति बदनाम हो गयी है। परन्तु वास्तव में गणित जैसे महत्त्वपूर्ण एवं श्रमसाध्य विषय को बिना अभ्यास के पढ़ाया जाना अच्छा नहीं है। यह पद्धति तो उपयोग में लानी ही है, परन्तु उसमें अध्यापक को अपने कर्त्तव्य से भली-भाँति परिचित भी होना चाहिए। उसको चाहिए कि जब बालक अभ्यास करे तो वह कक्षा में सब बालकों का निरीक्षण करे तथा बालक जहाँ अटके, वहीं उसकी कठिनाई दूर कर दे। ऐसा करने से सब बालक अभ्यास-कार्य में रुचिपूर्वक लगे रहेंगे और पूरा-पूरा लाभ उठा सकेंगे।

अंकगणित में अभ्यास का स्थान—अभ्यास का अंकगणित में मुख्य स्थान होता है। बिना अभ्यास के अंकगणित का कोई प्रयोगात्मक महत्त्व नहीं है। अंकगणित में अभ्यास पर्याप्त मात्रा में होना चाहिए। अभ्यास का कार्य समयानुसार छोटे-छोटे खण्डों में होना लाभप्रद होता है। यदि कक्षा को किसी नवीन विधि के आरम्भ में अभ्यास की आवश्यकता हो तो अध्यापक को चाहिए कि उस तरह के अभ्यास के प्रश्न विद्यार्थियों को करा दे, ताकि वे नवीन विधि को आसानी से समझ सकें। इस तरह के कार्य में विद्यार्थी स्वयं रुचि लेंगे और पाठ रोचक होगा।

अभ्यास का समय निश्चित होना चाहिए। किसी विशेष विधि के पश्चात् अभ्यास के लिए अधिक समय नहीं देना चाहिए। कभी-कभी अभ्यास के लिए 5 मिनट पर्याप्त

होते हैं, परन्तु सामान्यतया अभ्यास के लिए 10 मिनट दिये जाने चाहिए। अभ्यास में प्रश्नों की संख्या केवल उतनी होनी चाहिए जिनको कक्षा के सभी बालक कर सकें। जो बालक निश्चित समय से पहले अभ्यास प्रश्नों को हल कर लें, उनके लिए पुस्तक से और प्रश्न देने की व्यवस्था होनी चाहिए ताकि उनका समय व्यर्थ नष्ट न हो। इसके अतिरिक्त अभ्यास के प्रश्न इस तरह के होने चाहिए कि क्रमानुसार सरल से कठिन हों ताकि कक्षा में सभी प्रकार के बालक—मन्द बुद्धि से तीव्र बुद्धि वाले अभ्यास कार्य में व्यस्त रहें। प्रश्नों का क्रम 'सरल से कठिन की ओर' होना चाहिए।

अध्यापक को या तो कक्षा में ही अभ्यास प्रश्नों की जाँच कर लेनी चाहिए या अन्तर (Period) समाप्त होने पर जाँच करके दूसरे दिन के प्रश्न के हल करने से पहले उत्तर-पुस्तिका लौटा देनी चाहिए। अभ्यास के लिए प्रश्न देने में अध्यापक को पर्याप्त विचार करके प्रश्न तैयार करने चाहिए। उसको बालकों की कठिनाई को समझ कर अभ्यास हेतु उसी प्रकार के प्रश्न देने चाहिए, जिनके हल करने से उनकी कठिनाई दूर हो सके।

■■

13

गणित में परीक्षाएँ

[EXAMINATIONS IN MATHEMATICS]

गणित के सफल शिक्षण के लिए परीक्षाएँ परम आवश्यक हैं। शिक्षा के परिणामों की नाप-तोल करने के साथ-ही-साथ यह विद्यार्थियों को आगे बढ़ने, कठिनाइयों से टक्कर लेने और उन पर विजय प्राप्त करने की प्रेरणा देती हैं। इससे विद्यार्थी यह जान लेते हैं कि उन्होंने किस विषय में कितनी योग्यता प्राप्त कर ली है, किस विशेष स्थान पर उनको कठिनाई है। इस तरह परीक्षा छात्रों के लिए उस मील के पत्थर (Mile stone) के समान है जो यात्री को उसकी यात्रा में इस बात की सूचना देता रहता है कि उसने अपनी यात्रा का कितना मार्ग तय कर लिया है और कितना मार्ग अभी शेष रहा है। अध्यापक को इससे मालूम पड़ जाता है कि उसकी शिक्षा-प्रक्रिया किस सीमा तक सार्थक हुई। इसके अतिरिक्त अध्यापक परीक्षा द्वारा प्रत्येक बालक की बुद्धि, मनोशक्ति, रुचि, रुझान, स्तर (Standard) और कार्य का पता लगा लेता है। बालकों के संरक्षक परीक्षाओं द्वारा सहज में ही जान लेते हैं कि उनके बालक कितनी उन्नति कर रहे हैं। शिक्षाशास्त्री भी परीक्षाओं के आधार पर नवीन शिक्षा-प्रणालियों की जाँच एवं प्रयोग करते हैं। इस प्रकार शिक्षा से सम्बन्धित सभी व्यक्ति परीक्षा द्वारा मार्ग-दर्शन पाते हैं।

वर्तमान परीक्षाएँ

हाईस्कूल कक्षाओं में गणित की परीक्षाएँ लिखित में होती हैं। तीन घण्टे में प्रायः छः-सात प्रश्नों को हल करने को कहा जाता है। अंकगणित और बीजगणित में संख्यात्मक प्रश्न होते हैं। ग्राफ खींचने के ऊपर भी प्रश्न होता है। रेखागणित में साध्य (Theorems) और उन पर अभ्यास सिद्ध करने पड़ते हैं। कुछ प्रश्न रचनात्मक रेखागणित (Practical Geometry) के भी होते हैं। इन सब में भाषा का भरसक प्रयोग होता है। इण्टर कक्षाओं में भी गणित की परीक्षाएँ करीब ऐसी ही होती हैं। संख्यात्मक प्रश्नों के अतिरिक्त परिभाषाएँ भी पूछी जाती हैं। जूनियर हाईस्कूल में भी लिखित परीक्षाएँ होती हैं। इनमें संख्यात्मक प्रश्न के साथ रेखागणित में कुछ परिभाषाएँ तथा कुछ रचनात्मक कार्य पूछा जाता है। प्राइमरी कक्षाओं में लिखित परीक्षा के साथ मौखिक परीक्षा (Oral Test) भी होती है।

वर्तमान परीक्षाओं के दोष

वर्तमान परीक्षाएँ केवल सर्टीफिकेट या डिप्लोमा के लिए हैं। उनका उपयोग नौकरी पाने के लिए पासपोर्ट (Passport) के तौर पर है। यह शिक्षा-प्रणाली दोषमय है। इसके प्रति शिक्षाशास्त्रियों का विरोध दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। इसमें उपस्थित दोषों को तीन भागों में विभाजित किया जा सकता है।

1. विद्यार्थियों की दृष्टि से दोष—वर्तमान परीक्षा-प्रणाली के दोषों का विद्यार्थियों पर सबसे अधिक प्रभाव पड़ता है। परीक्षा का बुखार उन पर सदा चढ़ा रहता है। विद्यार्थी अपने जीवन में परीक्षा के अतिरिक्त किसी ओर ध्यान नहीं दे पाते। परीक्षा में सफल होना मात्र ही उनका ध्येय रहता है। प्रश्न-पत्र (Examination papers) भी पाठ्य-पुस्तक के सीमित ज्ञान पर ही आधारित होते हैं। इसलिए विद्यार्थी पिछले प्रश्न-पत्रों को देखकर और अध्यापकों के सुझाव के अनुसार सम्भावित प्रश्नों (Important Questions) की सूची तैयार कर लेते हैं। परन्तु इस प्रकार की तैयारी में प्रायः धोखा हो जाता है और एक अच्छा विद्यार्थी भी फेल हो जाता है। वर्तमान परीक्षा-प्रणाली विद्यार्थी के शारीरिक विकास में भी बाधक होती है। परीक्षा के दिनों में विद्यार्थी रात-रात भर जागकर, भूखे रहकर और सारे खेल-कूद छोड़कर परीक्षा की तैयारी में लग जाते हैं। इसका परिणाम यह होता है कि बहुत-से विद्यार्थी परीक्षा के दिनों में ही बीमार पड़ जाते हैं। इस प्रकार की परीक्षाओं से विद्यार्थी को नकल करने में भी सहायता मिलती है। परीक्षा के निकट आते ही विद्यार्थी प्रश्न-पत्र बनाने वाले और परीक्षकों के पते प्राप्त करने में व्यस्त हो जाते हैं। एक स्थान से दूसरे स्थान पर सम्भावित प्रश्न (Hints) भेजे जाने लगते हैं। उत्तर-पुस्तिकाएँ किस परीक्षक के पास जा रही हैं, इसका पता डिस्पैच क्लर्क से लेकर डाकखाने तक से लगा लेते हैं। फिर परीक्षकों के पास दोस्ती व रिश्ते के वसीले पर रौल नम्बर पहुँचाये जाते हैं। परीक्षकों की मिन्नतें करते हैं कि अन्य सभी पर्चे ठीक हो गये हैं, केवल इसी पर्चे में खतरा है। यदि इस बार भी फेल हो गया तो जीवन बर्बाद हो जायेगा। इस प्रकार परीक्षा-भवन में नकल, अध्यापकों पर आक्रमण, निरीक्षकों (Invigilators) की हत्या करने का षड्यन्त्र और परीक्षा-केन्द्र से उत्तर-पुस्तिकाओं को लेकर भाग जाने आदि का कलुषित व्यवहार छात्रों में इन परीक्षाओं के द्वारा ही आता है।

2. अध्यापकों की दृष्टि से दोष—प्रचलित परीक्षा-प्रणाली का प्रभाव अध्यापक और शिक्षण-विधि पर भी पड़ता है। अध्यापक परीक्षाफल (Result) अच्छा रखने के प्रयत्न में पाठ्य-विषय को भली-भाँति समझाने की बजाय उनको सम्भावित (Expected) प्रश्नों के उत्तर लिखा देते हैं। विद्यार्थी बिना समझे इनको रट लेते हैं। इस प्रकार बालकों के ज्ञान की जाँच नहीं हो पाती है। इसके अतिरिक्त परीक्षाफल को अच्छा करने के लिए कुछ अध्यापक तो नकल कराते पाये गये हैं।

3. परीक्षाफल की दृष्टि से दोष—प्रचलित परीक्षा-प्रणाली परीक्षाफल पर भी प्रभाव डालती है। इसका कारण यह है कि परीक्षित विषय के अतिरिक्त अन्य बातों का भी प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, गणित की उत्तर-पुस्तिकाएँ जाँचते समय परीक्षक (Examiner) को केवल गणित के ज्ञान की जाँच करनी चाहिए, परन्तु परीक्षार्थी के भाषा प्रवाह, लिखावट, आकृति की स्वच्छता आदि का भी परीक्षक पर प्रभाव पड़ता है। इसके अतिरिक्त परीक्षक के विचारों और मनोदशा (Mood) का भी प्रभाव परीक्षाफल पर पड़ता है। सन्तोष एवं प्रसन्नता की दशा में जाँची गयी उत्तर-पुस्तिका में अंक अधिक मिल जाते हैं, परन्तु दुःख, क्लेश अथवा क्रोध की अवस्था में जाँचने पर उसी उत्तर-पुस्तिका में अंक (Marks) कम मिलते हैं।

नवीन शिक्षा-प्रणाली

शिक्षा-विशेषज्ञों का कहना है कि गणित विषय में परीक्षा तो अवश्य होनी चाहिए, परन्तु परीक्षा-प्रणाली दोषरहित होनी चाहिए। परीक्षा के प्रश्न-पत्रों में प्रश्न अधिक संख्या में होने चाहिए। ऐसा करने से बालक के सम्पूर्ण पाठ्यक्रम के ज्ञान की जाँच हो सकेगी। इसके अतिरिक्त रटने के लिए भी प्रोत्साहन न मिलेगा और नकल (Unfair-means) करने की गुंजाइश भी न रहेगी। इन सभी विशेषताओं से सम्पन्न एक नवीन परीक्षा-प्रणाली का प्रयोग कुछ देशों में किया जा रहा है। अपने देश में भी इस प्रकार का एक-आध-प्रश्न, प्रश्न-पत्र में आने लगा है। इस प्रणाली के अनुसार परीक्षा प्रश्न-पत्र में प्रश्न तो काफी संख्या में होते हैं, परन्तु उनका उत्तर रेखांकित चिन्हों या एक या दो शब्दों में दिया जाता है। इस प्रकार के प्रश्नों को वस्तुनिष्ठ (Objective) रूप कहते हैं। इस प्रकार के प्रश्न नीचे (अ) भाग में दिये गये हैं। परन्तु गणित की सम्पूर्ण परीक्षा में वस्तुनिष्ठ रूप के अतिरिक्त निबन्धात्मक (Essay type) तथा लघु उत्तर वाले (Short answer type) प्रश्न भी रखे जाते हैं। इनके उदाहरण (ब) तथा (स) भाग में दिये गये हैं। प्रत्येक प्रश्न का अपना महत्त्व होता है।

(अ) 1. पूर्ति परीक्षण (Completion Test)

इस प्रकार की परीक्षा में कोई वाक्य दिया जाता है। इसमें कुछ शब्द छूटे होते हैं। इन शब्दों का स्थान खाली रहता है और विद्यार्थी उन खाली स्थानों को भरता है; जैसे—

निम्नलिखित वाक्यों की पूर्ति करो—

(1) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग.......... होता है।

(2) 1 : 5 : : .... : 20

(3) 12, 24, 36, ...

(4) $(4य^2 - 9र^2) = (2य - 3र)$ (.........)

2. बहुनिर्वचन प्रश्नों के रूप (Multiple Choice Test)

इस प्रकार की परीक्षा में एक प्रश्न पूछा जाता है और उसके साथ कई उत्तर दे दिये जाते हैं। इन उत्तरों में से एक सही उत्तर होता है और शेष सब गलत। सही उत्तर छाँटना पड़ता है; जैसे—

निम्नलिखित में सही उत्तर को रेखांकित कर दो—

(1) त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ (Medians) जिस बिन्दु पर मिलती हैं, उसे परिकेन्द्र, गुरुत्वकेन्द्र (Centroid), अन्तःकेन्द्र (Incentre) कहते हैं।

(2) यदि एक आयताकार मैदान की लम्बाई 500 मीटर और चौड़ाई 200 मीटर हैं तो इसका क्षेत्रफल 800, 1,000, 4,000, 1,00,000 वर्ग मीटर होगा।

(3) 30, 25, 29, 30 और 16 का औसत 30, 35, 24, 48 है।

(4) जिस त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर होती हैं, उसे समकोण, समबाहु, विषमकोण, समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

3. सत्यासत्य निर्देशन (True and False Test)

इस प्रकार की परीक्षा में कुछ कथन दे दिये जाते हैं और परीक्षार्थी उन्हें देखकर बताता है कि वह ठीक है अथवा गलत; जैसे–

(1) त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी के बराबर होता है।

(2) $4य^2 - 9र^2 = (2य + 3र)(2य - 3र)$

(3) $(य^2)^3 = य^2$

(4) 3 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का 300 रु० का साधारण ब्याज 20 रु० होता है।

4. मेल परीक्षा (Matching Test)

इस प्रकार की परीक्षाओं में दो कतारों में अलग-अलग कुछ शब्द दे दिये जाते हैं और ये शब्द इस प्रकार होते हैं कि कतार का प्रत्येक शब्द दूसरी कतार के किसी शब्द से मेल खाता है। परीक्षार्थी को मेल खाते हुए शब्दों को मिलाना होता है; जैसे–

निम्नलिखित दी हुई कतारों में से पहली कतार के प्रत्येक शब्द से मेल खाते हुए दूसरी कतार के शब्द को छाँटों और पहली कतार के शब्द के साथ लिखिए–

(1) एक चतुर्भुज जिसकी आमने-सामने की भुजाएँ समान्तर होती हैं।	(क) 63
(2) त्रिभुज की तीनों मध्यगत रेखाओं का कटान बिन्दु	(ख) समान्तर चतुर्भुज
(3) अधिक कोण	(ग) 15
(4) 20 – 5	(घ) गुरुत्व-केन्द्र
(5) 9 × 7	(ङ) 108°

5. पहचान परीक्षा (Recognition Test)

इस प्रकार की परीक्षा में कोई चित्र आदि बना दिया जाता है और उसके विभिन्न भागों के नाम पूछे जाते हैं; जैसे–

निम्न चित्र में क, क ब, ब स भागों के नाम लिखो तथा यह भी बताओ कि कोण ब क स और कोण ब अ स में क्या सम्बन्ध है ?

6. तर्कयुक्त चयन (Logical Selection)

इस प्रकार की परीक्षा में कई वस्तुओं के नाम दिये जाते हैं। उनमें एक के अतिरिक्त शेष सब ऐसी होती हैं जो आपस में मिलती हुई होती हैं। उस अतिरिक्त वस्तु को छाँटकर अलग करना होता है; जैसे–

निम्नलिखित समूह में से उस शब्द को काट दो जो समूह में अतिरिक्त मालूम पड़े।

(1) बिन्दु, सरल रेखा, अधिक कोण, चाप (Arc), वृत्त ब्याज, सम्मुखकोण।

(2) आसन्न कोण, सम्मुख कोण, समकोण, वृत्त, पुनर्युक्त कोण, न्यून कोण।

(3) 2, 5, 8, 11, v, 16, 17।

(4) ब्याज, दर, मूलधन, औसत, मिश्रधन, समय आदि।

(ब) निबन्धात्मक प्रश्न (Essay Type Questions)

इस प्रकार के प्रश्नों का प्रचलन बहुत समय से है। परन्तु इनके तैयार करने में प्राप्य उद्देश्यों को ध्यान में रखना चाहिए। साथ ही भाषा भी स्पष्ट होनी चाहिए।

उदाहरण–एक थैले में 10 पैसे तथा 25 पैसे के कुछ सिक्के हैं। थैले में कुल 60 सिक्के हैं तथा उनका मूल्य 13·05 रु० है। थैले में 10 पैसे के कितने सिक्के हैं ?

(स) छोटे उत्तर वाले प्रश्न (Short Answer Type Questions)

इस प्रकार के प्रश्नों का चयन अधिक रहता है। इसके विशिष्ट तथा छोटे उत्तर होते हैं।

उदाहरण–किसी मूलधन का ब्याज (Interest) ज्ञात करने के लिए क्या-क्या होना चाहिए ?

7. बुद्धि-परीक्षा (Intelligence Test)

परीक्षा में कुछ प्रश्न ऐसे भी देने चाहिए, जिनमें बालकों को अपनी बुद्धि लगानी पड़े। प्रायः अध्यापक बालकों को कुछ ऐसे सूत्र तथा कायदे बता देते हैं कि बालक प्रश्न पढ़ते ही मशीन की तरह प्रश्न करने लग जाते हैं। अतः परीक्षा प्रश्न-पत्र में ऐसे प्रश्न भी होने चाहिए जिनमें बालक को अपनी बुद्धि प्रयोग करने का अवसर प्राप्त हो; जैसे–"एक गाँव में पाँच कुएँ हैं, जिनकी गहराई क्रमशः 16, 18, 20, 24 और 25 मीटर है। बताओ वह छोटी-से-छोटी चलन रस्सी कितनी लम्बी होगी जो पाँचों कुओं में काम आ सके।" इस प्रश्न में छोटी-से-छोटी लम्बाई निकालने के लिए प्रायः लघुत्तम (L.C.M.) निकालने की सोचेंगे, क्योंकि अक्सर वे छोटी-से-छोटी राशि निकालने के लिए लघुत्तम निकालते थे।

यह नवीन परीक्षा-प्रणाली पूर्णतः विश्वसनीय है। इसमें प्रश्न-पत्र सम्पूर्ण पाठ्यक्रम पर बनाया जा सकता है। इसके अतिरिक्त प्रश्न इतने अधिक होते हैं कि रटना भी सम्भव नहीं। प्रश्नों की संख्या अधिक होने के साथ-साथ समय कम मिलता है। अतः बालकों को नकल करने की गुंजाइश भी इस प्रणाली में नहीं रहती। वे प्रश्नों के उत्तर देने में ही इतने व्यस्त रहते हैं कि इधर-उधर ध्यान नहीं दे पाते। यदि वे इधर-उधर देखेंगे तो सम्पूर्ण प्रश्न-पत्र को हल नहीं कर सकेंगे। इन परीक्षा

प्रश्न-पत्रों के प्रश्न का एक ही सही उत्तर सम्भव होता है, अतः विभिन्न परीक्षकों में मतभेद की कोई गुंजाइश नहीं रहती। अंक देते समय परीक्षक की मनोदशा का भी प्रभाव नहीं पड़ता, क्योंकि प्रश्न सही है तो पूर्णांक (Full Marks) और यदि गलत हो तो शून्य मिलता है।

इन सब अच्छाइयों के होते हुए भी इस प्रणाली में कुछ कमियाँ हैं। इसमें बालकों को अटकल तथा अनुमान द्वारा प्रश्नों के उत्तर देने का काफी अवसर मिलता है। इसके अतिरिक्त इस प्रणाली का प्रयोग करने से बालकों को गणित का वास्तविक ज्ञान चाहे अवश्य हो जाता है, परन्तु गणित के किसी तथ्य को दूसरों के सामने भली-भाँति रखने की क्षमता उनमें तनिक भी नहीं आ पाती। इसलिए इस नवीन प्रणाली के साथ-साथ मौखिक परीक्षा और निबन्धात्मक परीक्षा का भी समावेश होना आवश्यक है। परीक्षा प्रश्न-पत्र में एक-आध प्रश्न ऐसे भी होने चाहिए, जिनका उत्तर विधि सहित लिखा जाय। इसके अतिरिक्त इस बात की भी आवश्यकता है कि बालकों की परीक्षा हर महीने होनी चाहिए और सब परीक्षाओं के परिणाम पर ही उनको पास करना चाहिए। ऐसा करने से बालक वर्ष के अन्त में केवल कुछ महीने पढ़कर पास होने का प्रयत्न न करेंगे।

वस्तुनिष्ठ रूप (Objective Type Questions) हेतु आवश्यक बातें जो ध्यान में रखनी चाहिए

यह बात स्पष्ट है कि प्रश्न तैयार करने में उनका रूप उतना महत्त्वपूर्ण नहीं है; जितना कि बालक के आवश्यक व्यवहार का ज्ञान प्राप्त करना, इसलिए गणित के अध्यापक को यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि वह किस बात या गुण की परख करना चाहता है और फिर प्रश्न के रूप को तैयार करे। वस्तुनिष्ठ रूप के प्रश्नों के अपने गुण और दोष होते हैं।

(क) पूर्ति परीक्षण रूप (Completion Test)—इनका प्रयोग भी मापन हेतु सीमित है। इनके उत्तरों से बालक की समझने की क्षमता का ज्ञान नहीं हो पाता है। यदि प्रश्न बिल्कुल स्पष्ट न हो तो एक रिक्त स्थान पर कई उत्तर सम्भव हो सकते हैं, जिससे अंक प्रदान करने में कठिनाई आती है। इनके तैयार करने में निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

(1) रिक्त स्थान ऐसे स्थान पर हो, जहाँ खास शब्द, चिन्ह तथा संख्या रखी जायें।

(2) प्रश्न में अधिक रिक्त स्थान रखकर प्रश्न को जटिल बनाया जाय।

(3) रिक्त स्थान प्रश्न के आरम्भ तथा अन्त में न हो।

(4) वाक्य तथा वर्णन पुस्तक से लेकर उसमें जहाँ कहीं भी रिक्त स्थान न रखा जाय।

(ख) बहुनिर्वचन प्रश्नों के रूप (Multiple Choice Test)—वस्तुनिष्ठ रूप प्रश्नों में बहुनिर्वचन प्रश्नों का प्रयोग सबसे अधिक होता है। इसके प्रयोग करने के निम्नलिखित कारण है—

(1) इस प्रकार के प्रश्न सरलता से तैयार किये जाते हैं।

(2) इस प्रकार के प्रश्न बालकों को रुचिकर होते हैं।

(3) इनका प्रयोग भिन्न-भिन्न कार्यों में सम्भव है, जैसे—

(अ) पद, परिभाषा, प्रत्यय की परख करने में।

(ब) तर्क तथा भिन्नता ज्ञान करने वाले प्रश्नों में।

(स) नवीन स्थितियों में सिद्धान्त तथा विचारों के प्रयोग करने वाले प्रश्नों में।

(4) इस प्रकार के प्रश्नों में अधिक उत्तरों के कारण अनुमान लगाना भी कम हो जाता है। इस प्रकार प्रश्न-पत्र की विश्वसनीयता (Reliability) दूसरों से अधिक होती है।

(5) अंक प्रदान करना सरल और शीघ्र सम्भव है।

बहुनिर्वचन प्रश्न तैयार करने में निम्न सावधानी रखनी चाहिए

(1) प्रश्न के जो कई उत्तर (Distractors) दिये जाते हैं, वे एक-दूसरे से बहुत मिलते-जुलते हों, जिससे बालक उनके चुनने में अनुमान का प्रयोग न कर सके।

(2) व्याकरण की दृष्टि से सब उत्तर एक तरह के हों।

(3) सही उत्तर अधिक लम्बा या छोटा न हो।

(4) उत्तर ऐसे न हों जिनमें सामान्य स्मृति की परीक्षा हो।

(ग) सत्यासत्य निर्देशन (True and False Test)—इस रूप के प्रश्न अध्यापकों में अधिक प्रचलित हैं, परन्तु वास्तविक रूप से प्रश्न तैयार करना सरल नहीं होता है। इसके साथ-ही-साथ इनमें अनुमान (Guessing) लगाना सरल होता है, इसलिए अब इस रूप में कुछ परिवर्तन किया गया है। इनके स्थान पर Modified True and False रूप प्रयोग में आता है। इसके अनुसार यदि उत्तर गलत है तो बालक को स्वयं सोचकर सही उत्तर देना होता है। केवल सही या गलत कह देना पर्याप्त नहीं है। थोड़ी सावधानी रखने पर इस रूप के प्रश्न, पदों की व्याख्या, मतलब, चित्रों में गुण आदि प्रयोग में लाये जा सकते हैं।

(घ) मेल परीक्षा रूप (Matching Type)—इस रूप का विकास बहुनिर्वचन रूप से हुआ है। इस प्रकार के प्रश्नों का प्रयोग वस्तुओं, चित्रों, गुणों, सूत्र आदि में लाभप्रद होता है। एक प्रश्न में समान वस्तुओं का प्रयोग करना चाहिए। उत्तरों के स्तम्भ में प्रश्नों के स्तम्भ से अधिक संख्याएँ होनी चाहिए ताकि अन्त तक 3 या 4 उत्तरों में से सही उत्तर छाँटा जा सके।

केन्द्रीय शिक्षा मन्त्रालय तथा शिक्षा सलाहकार बोर्ड ने परीक्षा पद्धति के सुधार में सुझाव देने के लिए एक उच्च स्तरीय समिति नियुक्त की। उस समिति के सुझाव इस प्रकार हैं—

राज्य तथा केन्द्र सरकारों को निम्नलिखित मामलों से सम्बन्धित सुसंगत कानूनों में संशोधित विधान को पारित करने के लिए शीघ्र ही उपयुक्त उपाय करने चाहिए—

(1) सुस्थापित संस्थाओं को स्वायत्त स्तर प्रदान करने के लिए बोर्ड या विश्वविद्यालय को अधिकार देना।

(2) परीक्षा अधिकारियों को छात्रों की जाँच तथा हथियारों सहित उनके परीक्षा-भवनों में प्रवेश करने पर प्रतिबन्ध लगाने के अधिकार देना।

(3) परीक्षा-भवन से कुछ दूरी पर व्यक्तियों के एकत्र होने को काफी बड़ा अपराध मानना।

(4) विश्वविद्यालय-मण्डलों के कर्मचारियों और अधिकारियों के कदाचारों को संज्ञेय अपराध मानना।

(5) परीक्षा अधिकारियों को निरीक्षकों और परीक्षकों के लिए जोखिम बीमा कराने का अधिकार देना।

(6) परीक्षक, निरीक्षक तथा परीक्षा से सम्बन्धित किसी भी व्यक्ति पर आक्रमण करने को संज्ञेय अपराध मानना।

परीक्षाओं का संचालन

(1) प्रश्न-पत्र बनाने वालों की नियुक्ति कम-से-कम एक सार्वजनिक परीक्षा के चालू होने से छः मास पूर्व होनी चाहिए और उन्हें प्रश्नों का मसौदा तैयार करने के लिए कम-से-कम आठ सप्ताह का समय दिया जाना चाहिए। प्रश्न-पत्रों को अन्तिम रूप, प्रश्न-पत्र बनाने वालों की बैठक में दिया जाना चाहिए।

(2) जिस सार्वजनिक परीक्षा में छात्रों की बड़ी संख्या हो, वहाँ दस-दस हजार स्कूली छात्रों अथवा एक-एक हजार कॉलेज छात्रों के ग्रुप में परीक्षाओं को पृथक् करके उनका विकेन्द्रीकरण करना चाहिए।

(3) एक सार्वजनिक परीक्षा का आयोजन उसी संस्थान में होना चाहिए जिसमें छात्र पढ़ते हों, अधिकांश निरीक्षकों और अधीक्षकों को सम्बन्धित संस्थान से ही लिया जाना चाहिए।

(4) सार्वजनिक परीक्षा-केन्द्रों में दाखिला एक मुख्य प्रवेश-द्वार से होना चाहिए। पूर्ण जाँच-पड़ताल के बाद पहचान-पत्रों सहित वास्तविक छात्रों को ही परीक्षा-केन्द्र में दाखिल किया जाना चाहिए।

(5) प्रश्न-पत्र बनाने वालों को प्रश्नों के साथ हमेशा नमूने के उत्तर भी तैयार करके भेजने चाहिए।

(6) तैयार किये गये प्रश्न-पत्रों की प्रतियाँ स्कूल और कॉलेजों के अध्यापकों को परीक्षा वाले दिन, परन्तु परीक्षा की समाप्ति पर उपलब्ध करायी जायें ताकि अध्यापक अधिकारियों को अपनी टिप्पणियाँ दे सकें।

(7) केन्द्रीय स्थान जहाँ सभी परीक्षकों को बुलाया जाता है, वहाँ प्रत्यक्ष मूल्यांकन की पद्धति अपनायी जानी चाहिए।

(8) परिणाम विषयवार घोषित किये जाने चाहिए तथा वर्गों (ग्रेडस्) के रूप में प्रस्तुत किया जाना चाहिए। परीक्षकों द्वारा दिये अंक कभी भी उपलब्ध नहीं कराये जाने चाहिए।

(9) विषयों को विषयवार पास करने की पद्धति शुरू की जानी चाहिए और कम-से-कम विषय पास करने वाले उम्मीदवारों को पब्लिक प्रमाण-पत्र दिया जाना चाहिए।

(10) जाँच-पड़ताल अधिकारी द्वारा जारी किये जाने वाले प्रमाण-पत्रों में दो कॉलम होने चाहिए। एक में पब्लिक परीक्षा का परिणाम और दूसरे में अध्यापकों के आन्तरिक मूल्यांकन का परिणाम होना चाहिए।

(11) किसी परीक्षा अथवा विषय में प्रथम स्थान प्राप्त करने वाले परीक्षार्थी को पुरस्कार अथवा छात्रवृत्ति देने के लिए एक पृथक् परीक्षा आयोजित की जानी चाहिए और इस परीक्षा में प्रवेश केवल उन्हीं परीक्षार्थियों तक सीमित हो, जिन्होंने पब्लिक-परीक्षा सर्वोच्च वर्ग (ग्रेड) में पास की है।

(12) पब्लिक परीक्षाएँ बहुत अधिक नहीं होनी चाहिए। एक अपर प्राथमिक या मिडिल स्कूल स्तर के अन्त में, दूसरी माध्यमिक स्तर के अन्त में, तथा तीसरी डिग्री स्तर पर। शेष सब सिर्फ आन्तरिक मूल्यांकन की हों।

परीक्षा परिणाम का उपयोग

(1) सेवाओं में भरती संघ लोक सेवा आयोग द्वारा आयोजित जाँच परीक्षाओं के आधार पर की जानी चाहिए तथा लिपिक पदों की नियुक्ति के लिए अधिक-से-अधिक कम करके 19 वर्ष कर देनी चाहिए।

(2) व्यावसायिक कॉलेजों सहित कॉलेजों में दाखिला विशिष्ट पाठ्यक्रम के लिए विद्यार्थी की योग्यता का मूल्यांकन करने हेतु विशेष तौर पर आयोजित प्रवेश जाँच के आधार पर होना चाहिए। इन जाँचों में बैठने के लिए पात्रता केवल पब्लिक परीक्षा के परिणामों द्वारा निर्धारित की जानी चाहिए।

शिक्षा बजट

भविष्य में परीक्षाओं के मार्गदर्शन, अध्ययनों तथा अनुसन्धानों के लिए अध्ययन तथा राज्य सरकार दोनों को ही निधि अलग-अलग निहित करनी चाहिए।

अनुसन्धान

राज्य तथा केन्द्रीय दोनों ही स्तरों पर परीक्षाओं के सम्बन्ध में सतत अध्ययन तथा अनुसन्धान और बोर्डों—विश्वविद्यालय में समन्वित रूप होना चाहिए।

नयी विचारधारा

संगठन और पब्लिक परीक्षाओं के आयोजन में नयी विचारधारा को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

भूतपूर्व शिक्षामन्त्री प्रो० नूरुल हसन ने एक दिन राज्य सभा में समिति की सिफारिश प्रस्तुत करते हुए घोषणा की थी कि समिति के परीक्षा-पद्धति में सुधार-सम्बन्धी प्रस्तावों पर सक्रिय रूप से विचार किया जा रहा है।

10 + 2 के पाठ्यक्रम हेतु परीक्षा

10 + 2 के नवीन पाठ्यक्रम के मूल्यांकन हेतु NCERT में विद्वानों की गोष्ठियाँ हुईं जिनका निष्कर्ष परीक्षा-प्रणाली को नवीन दिशा प्रस्तुत करना है। इनके विचारों का निम्नलिखित निष्कर्ष है—

(1) छात्रों के पाठ्य-वस्तु सम्बन्धी कार्यों के मूल्यांकन की अपेक्षा उनके विकास जैसे उनकी रुचि, अभिवृत्ति तथा सामाजिक गुण और विद्यालय के कार्यों में भाग लेना आदि के मूल्यांकन पर अधिक बल होना चाहिए।

(2) एक वर्ष में केवल एक परीक्षा द्वारा छात्र की स्थिति जानने की अपेक्षा लगातार मूल्यांकन करना जिससे छात्र की वास्तविक स्थिति का ज्ञान सम्भव हो सके।

(3) परीक्षा में प्रशासन तथा पाठ्य-वस्तु द्वारा सम्भावनाओं तथा व्यक्तिगत प्रभाव को कम करना।

(4) परीक्षाओं में ज्ञान के बोध, अनुप्रयोग (Application) तथा विवेचनात्मक चिन्तन का अधिक-से-अधिक समन्वय करना जिससे छात्रों को रटने की प्रवृत्ति का कम-से-कम प्रोत्साहन मिले।

(5) परीक्षा में मूल्यांकन हेतु भिन्न-भिन्न प्रकार की तकनीक तथा उपकरणों का प्रयोग किया जाय।

(6) शिक्षक, विद्यार्थी तथा अभिभावक तीनों ही परीक्षा-परिणामों के आधार पर उसका जीवन-सम्बन्धी तथा महत्त्वशाली प्रयोग करने हेतु पूर्ण लाभ उठा सकें।

(7) परीक्षा-परिणामों का व्यापक प्रयोग; जैसे—निर्देशन, पाठ्यक्रम के मूल्यांकन तथा शैक्षिक भविष्यवाणी में सम्भव हो सके।

(8) स्वयं परीक्षा के कार्य में सुधार की सम्भावना हो सके।

(9) परीक्षा के आधार पर पाठ्यक्रम, पाठन-सामग्री तथा शिक्षण-विधियों में परिवर्तन सम्भव हो सके।

(10) सम्पूर्ण परीक्षाफल को महत्त्व न देकर प्रत्येक विषय के अंकों को महत्त्व दिया जाय, जिसके आधार पर व्यवसाय का चयन तथा आगे का अध्ययन सम्भव हो सके।

■■

14

गणित-अध्यापक
[MATHEMATICS TEACHER]

आधुनिक युग में बच्चे के सीखने हेतु पाठ्य-वस्तु, बच्चा तथा अध्यापक तीनों महत्त्वपूर्ण हैं। इनका अपना-अपना महत्त्व है। ये तीनों अपनी-अपनी विशेषताएँ रखते हैं। सीखने में अध्यापक का स्थान सबसे महत्त्वपूर्ण है क्योंकि वही पाठ्य-वस्तु (Subject-matter) को बच्चे के सामने प्रस्तुत करता है। यदि अध्यापक का व्यवहार बच्चे की भावनाओं को ध्यान में रखते हुए होता है तो बच्चे को अध्यापक तथा उसके पढ़ाने में प्रेम होगा और उसके सीखने (Learning) की गति तीव्र होगी।

प्रत्येक विषय की अपनी-अपनी विशेषताएँ होती हैं, जिनको समझना उस विषय के अध्यापक को आवश्यक तथा अनिवार्य होता है। इस तरह प्रत्येक विषय के अध्यापक में कुछ ऐसे गुण होने चाहिए जिनके द्वारा वह एक सफल अध्यापक बन सके। प्रत्येक अध्यापक में कुछ ऐसी विशेषताएँ होनी आवश्यक हैं जिनके बिना वह अध्यापक नहीं कहलाया जा सकता है। उन विशेषताओं को सामान्य विशेषताएँ (General Qualities) कहते हैं। इसका सम्बन्ध इस व्यवसाय (Profession) में काम करने वाले प्रत्येक व्यक्ति से होना अनिवार्य है। इन सामान्य विशेषताओं के अतिरिक्त प्रत्येक विषय हेतु अध्यापक में कुछ विशेष तथा विशिष्ट गुण होने आवश्यक हैं। इस अध्याय में गणित पढ़ाने वाले अध्यापक के गुणों का वर्णन किया गया है, जो निम्नलिखित हैं—

(1) विषय का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए (Thorough Knowledge of the Subject)—किसी भी विषय के अध्यापक में यह गुण होना अति आवश्यक है कि वह अपने विषय में पूर्णरूप से निपुण तथा पूर्ण जानकारी रखता हो। उसको अपने विषय पर इतना अधिकार हो कि वह बिना हिचक तथा संकोच के पाठ्य-वस्तु (Subject-matter) को दूसरों के सम्मुख प्रस्तुत कर सके। किसी भी विषय में पूर्ण अधिकार प्राप्त करने हेतु विषय का गहरा अध्ययन होना आवश्यक है। विषय में अधिकार तभी हो सकता है, जबकि अध्यापक विषय का विस्तृत (Extensive) अध्ययन करे तथा उसके बारे में समझे।

इसके साथ-ही-साथ गणित अध्यापक को अपने विषय का सही ज्ञान होना आवश्यक है। गणित को प्रभावित रूप से पढ़ाने के लिए अध्यापकों को जीवन में

गणित के प्रभाव का पूर्ण ज्ञान होना अनिवार्य है। गणित पढ़ाने के लिए अध्यापक को केवल गणित विषय का ज्ञान होना ही आवश्यक नहीं है बल्कि जीवन में गणित का प्रयोग जहाँ-जहाँ होता हो, उसकी पूर्ण जानकारी भी होनी चाहिए। इस प्रकार के कार्यों में वस्तुओं का व्यापार, वस्तुओं का खरीदना, सट्टा (Speculation), ठेके में हिस्सा, रुपये का लेन-देन (Banking) आदि प्रमुख हैं, जिनका जीवन से गहरा सम्बन्ध होता है।

गणित में पांडित्य (Scholarship) तभी सम्भव हो सकता है, जबकि गणित के इतिहास की जानकारी हो तथा समय-समय पर होने वाली गणित-सम्बन्धी घटनाओं का ज्ञान हो। कक्षा में गणित विषय को रोचक बनाने के लिए उसको जीवन से सम्बन्धित करके बालकों के सम्मुख रखा जाना अनिवार्य है। अध्यापक को गणित पढ़ाते समय बच्चे को कठिनाई का बोध तभी हो सकता है जबकि उसको समय-समय पर होने वाली कठिनाइयों का ज्ञान हो जो मनुष्य जाति को प्रारम्भिक समय से अब तक गणित के तथ्यों को प्राप्त करने में हुई थीं। वह पूर्वज्ञान अध्यापक की बड़ी भारी सहायता कर सकता है, जिसके आधार पर बच्चों की गणित-सम्बन्धी कठिनाई का बोध होता है। इस तरह बच्चों की गणित-सम्बन्धी कठिनाइयों के समझने पर ही उनका निवारण सम्भव है।

उपर्युक्त ज्ञान के लिए अध्यापक को सम्पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। गणित विषय में अब तक जो भी पुस्तकें लिखी गयी हों, उनको अध्यापक को अवश्य पढ़ लेना चाहिए। इसके अतिरिक्त विषय में जो पत्रिकाएँ तथा नवीन खोज के पत्र छपे हों, उनका अध्ययन भी आवश्यक है। इस तरह नवीन ज्ञान की जानकारी होने पर अध्यापक अपने विषय की वास्तविक माँग की पूर्ति कर सकता है तथा विषय को आसानी से दूसरे लोगों के सम्मुख रख सकता है। इसके अतिरिक्त समय-समय पर गणित के विद्वानों के भाषणों का भी महत्त्व होता है।

(2) पाठ्य विधियों की शिक्षण की आवश्यकता (Training of Teaching Methods)—जैसा कि पाठन विधियों (Teaching Methods) के अध्याय में गणित पढ़ाने के लिए भिन्न-भिन्न विधियों की आवश्यकता का वर्णन किया गया है, उनका ज्ञान भी गणित-अध्यापक को होना आवश्यक है। गणित के भिन्न-भिन्न उपविषयों (Topics) को पढ़ाने के लिए भिन्न-भिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है, इसलिए इनका ज्ञान गणित-अध्यापक को होना जरूरी है। विषय का ज्ञान होते हुए भी गणित के अध्यापक को तभी सफलता प्राप्त हो सकती है, जबकि विषय को प्रस्तुत करने का ढंग उसको ज्ञात हो। इसलिए गणित के अध्यापक को शिक्षण-विधियों की पूर्ण शिक्षा ले लेनी चाहिए।

(3) गणित-अध्यापक को विषय के लिए उत्साहित होना चाहिए (Enthusiasm of his Subject)—गणित के अध्यापक को केवल गणित का ज्ञान तथा विधियों की शिक्षा का ज्ञान होना ही आवश्यक नहीं है, बल्कि उसमें गणित पढ़ाने के लिए उत्साह भी होना चाहिए। बिना उत्साह के वह गणित सफलता से नहीं पढ़ा सकता है और न बालकों में विषय के प्रति रुचि तथा उत्साह उत्पन्न कर सकता है। इस तरह गणित का एक सफल अध्यापक होने के लिए विषयों में उत्साह का होना आवश्यक है।

गणित के इतिहास, गणित की नवीन विधियों तथा मनुष्य के जीवन में गणित की उपयोगिता आदि से बालकों में गणित के प्रति रुचि उत्पन्न होती है। इसके अतिरिक्त एक सफल गणित-अध्यापक को अपने स्कूल में एक गणित क्लब (Mathematics Club) भी स्थापित करना चाहिए। इस क्लब में गणित-सम्बन्धी समस्याओं (Problems) का समाधान किया जाता है और गणित के सिद्धान्तों (Principles) के आधार पर नवीन उपकरणों को बनाया तथा गणित के नवीन चमत्कारों का ज्ञान प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार क्लब (Club) के प्रत्येक बालक को स्वयं कार्य करने के लिए प्रोत्साहन मिलता है तथा जिन तथ्यों (Facts) की जानकारी तथा हल कक्षा में नहीं हो सकते हैं उनको क्लब में आसानी से हल किया जा सकता है। इस तरह शिक्षा के सिद्धान्त के अनुसार बालक क्लब में क्रियाशील रहता है और उसको विषय का वास्तविक ज्ञान हो जाता है। इसमें बालक अध्यापक के निकट सम्पर्क में भी आ जाते हैं जो कि उनके ज्ञान प्राप्त करने में सहायक होता है।

(4) अध्यापक को सम्पूर्ण तैयारी करनी चाहिए (Thorough Preparation)—अध्यापक को यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि वह अपनी कक्षा में बालक का थोड़ा समय भी बरवाद न करे। जिस तरह बालकों का यह कर्त्तव्य है कि वे कक्षा में अध्यापक का समय नष्ट न करें। यदि अध्यापक चाहता है कि वह कक्षा में बालकों को अधिक-से-अधिक ज्ञान दे तो इसके लिए उसकी तैयारी सम्पूर्ण रूप में होनी चाहिए। यह सोचना भूल है कि गणित को प्रारम्भ में पढ़ाने वाले या छात्राध्यापक (Pupil-Teacher) को ही गणित पढ़ाने के लिए तैयारी की आवश्यकता पड़ती है। गणित पढ़ाने वाले सभी अध्यापकों को चाहे वे कितने भी अनुभवी हों, तैयारी अवश्य करनी चाहिए। कभी-कभी कक्षा में इस तरह की समस्याएँ (Problems) तथा कठिनाइयाँ आ जाती हैं जिनका हल करना कठिन प्रतीत होता है। इसके हल करने के लिए अध्यापक को सम्पूर्ण तैयारी करना आवश्यक होता है। यदि कठिनाइयों के निवारण हेतु कक्षा में ही समय दिया जाय तो कक्षा का अधिक समय नष्ट होता है।

(5) प्रत्येक पाठ की तैयारी (Preparation for Each Lesson)—प्रत्येक अन्तर (Period) कि लिए किसी एक सामान्य तैयारी से काम नहीं चलता है। प्रत्येक अन्तर (Period) के लिए सामान्य तैयारी के अतिरिक्त एक विशेष (Specific) तैयारी की आवश्यकता पड़ती है। कोई अध्यापक अपने कार्य में तभी सफल हो सकता है जबकि वह प्रत्येक अन्तर के लिए तथा विभिन्न कक्षाओं के लिए एक विशेष तथा सम्पूर्ण तैयारी करे।

इस तरह गणित के अध्यापक के लिए यह परम आवश्यक है कि वह खोज विधि (Heuristic Method) द्वारा बालकों को गणित पढ़ाये तथा उनकी स्वयं की अभिवृत्ति (Attitude), खोज (Heuristic) हो। प्रत्येक स्थिति में उसकी कक्षा के बालकों को एक खोज करने वाले के स्थान में रखना चाहिए, ताकि बालक स्वयं अपने लिए नवीन ज्ञान की खोज करें। बिना उपयुक्त विधि को अपनाये वह गणित का एक सफल अध्यापक नहीं हो सकता है।

गणित-अध्यापकों की वर्तमान दशा

भारत में गणित-अध्यापकों की दशा बड़ी शोचनीय है। शिक्षा के क्षेत्र की वर्तमान आर्थिक एवं सामाजिक (Financial and Social) परिस्थितियों में कोई अपनी इच्छा से अध्यापक बनने को तैयार नहीं होता; अन्य व्यवसायों में जब वह स्थान नहीं पाता, तभी वह इस कार्य की ओर झुकता है। दूसरी बात यह भी है कि सारे देश में ऐसे अध्यापकों की कमी है जो गणित जैसे विषय में पूर्ण ज्ञान रखते हों। इसका परिणाम यह होता है कि यह विषय उनको पहाड़ के समान दिखायी देने लगता है और उसकी रुचि (Interest) घट जाती है। काफी लोग ऐसे हैं जो इस विषय में पण्डित हैं, परन्तु वे विद्यार्थियों की कठिनाइयों से परिचित नहीं हैं। अतः वह अपना पूर्ण ज्ञान विद्यार्थियों तक पहुँचाने में बिल्कुल असमर्थ रहते हैं। कुछ ऐसे अध्यापक भी हैं, जिनमें अध्यापन व्यवसाय की क्षमता है, परन्तु विषय ज्ञान का अभाव है।

गणित के प्रशिक्षित एवं सुयोग्य अध्यापक बड़े-बड़े नगरों के अतिरिक्त छोटे-छोटे नगरों में जाना पसन्द ही नहीं करते। एक तो उनको वहाँ का वातावरण पसन्द नहीं है और दूसरे उनको ट्यूशन आदि नहीं मिल पाते हैं।

सुझाव

पूरी साल में एक बार करीब एक महीने के लिए प्रशिक्षण का आयोजन अथवा सेमीनार (Seminar) किया जाय। वहाँ पर माध्यमिक कक्षाओं के लिए गणित-अध्यापकों के लिए रिफ्रेशर कोर्स संयोजित किये जायें। उनको नवीन शिक्षा-प्रणालियों से अवगत कराया जाय।

जो अध्यापक प्रशिक्षित (Trained) नहीं हैं, उनके लिए प्रशिक्षण संस्थाओं में प्रशिक्षण का आयोजन करना चाहिए।

सुयोग्य गणित-अध्यापक प्राप्त करने के लिए उनका वेतन (Pay-scale) उनकी योग्यता के अनुसार दिया जाना चाहिए, जिससे अध्यापक-वर्ग ट्यूशन की तरफ ध्यान न देकर कक्षा में मेहनत के साथ पढ़ायें।

सरकार द्वारा समय-समय पर गणित-सम्बन्धी इस प्रकार के आयोजन करने चाहिए जिससे अन्य देशों के विद्वान उन अध्यापकों के सम्पर्क में आयें और वे अपनी उन्नति कर सकें।

गणित अध्यापक के गुण व कर्त्तव्य

गणित अध्यापक के निम्न दो प्रकार के गुण होते हैं—

1. वैयक्तिक गुण
2. व्यावसायिक गुण

1. वैयक्तिक गुण—

(1) आदर्श जीवन दर्शन।
(2) प्रजातान्त्रिक नेतृत्व की क्षमता।
(3) आत्मविश्वास एवं दृढ़ इच्छाशक्ति।
(4) धैर्यवान एवं सहनशील।
(5) रुचि एवं उत्साहपूर्ण।

(6) प्रेम एवं सहानुभूति।
(7) उत्तम स्वास्थ्य।
(8) संवेगात्मक सन्तुलन।
(9) पक्षपात रहित।
(10) वेश-भूषा।
(11) आदान।
(12) भाषा।
(13) चरित्रवान।
(14) नैतिकता हो।
(15) मौलिक विचारवान।
(16) तर्क-शक्ति दृढ़ हो।

2. व्यावसायिक गुण—

(1) अपने विषय का ज्ञाता।
(2) बुद्धिमान एवं विचारक।
(3) आधुनिक मनोविज्ञान का ज्ञाता।
(4) बालकों की प्रकृति का ज्ञाता।
(5) व्यावसायिक निष्ठा हो।
(6) पाठ्य सहगामी क्रियाओं में रुचि हो।
(7) संस्कृति के संरक्षण का ज्ञान हो।
(8) कक्षा में छात्रों के समक्ष उचित व्यवहार हो।
(9) कक्षा नियन्त्रण की क्षमता हो।
(10) शिक्षण विधियों का पूर्ण ज्ञान हो।
(11) व्यक्ति व समाज की आवश्यकताओं का ज्ञाता हो।
(12) समय का पाबन्द हो।
(13) उत्तम संगठनकर्त्ता।
(14) उत्तम व आधुनिक मूल्यांकन पद्धतियों में निपुण हो।
(15) दृश्य-श्रव्य सामग्री का गणित में उचित स्थानों पर प्रयोग करता हो।

गणित अध्यापक के कर्त्तव्य

(1) अपने गुणों को सँजोने के प्रति दायित्व।
(2) छात्रों के साथ मित्रवत् व्यवहार।
(3) छात्रों की रुचियों एवं आवश्यकताओं पर ध्यान देना।
(4) सभी छात्रों को समान दृष्टि से देखना।
(5) मनोवैज्ञानिक विधियों द्वारा शिक्षण कार्य।
(6) छात्रों की समस्याओं का ध्यान रखना।

(7) छात्रों की सुख-सुविधा का ध्यान रखना।
(8) छात्रों को गणित के प्रति प्रोत्साहन प्रदान करना।
(9) छात्रों से सहयोग प्राप्त करना तथा उन्हें सहयोग देना।
(10) पाठ्य सहगामी क्रियाओं में छात्रों के साथ भाग लेना।
(11) छात्रों के व्यक्तिगत जीवन में मार्गदर्शन करना।
(12) दूसरे साथी अध्यापकों के साथ सहानुभूतिपूर्ण व्यवहार।
(13) अध्यापक साथियों की समस्याओं के समाधान में सहयोग।
(14) प्रधानाचार्य द्वारा निर्धारित कार्यों को निष्ठा से पूर्ण करना।
(15) प्रधानाचार्य को सम्भव सहयोग देना।
(16) छात्रों के अभिभावकों से उचित सम्बन्ध व अच्छा व्यवहार करना।
(17) समाज के सामने आदर्श प्रस्तुत करना।
(18) राष्ट्रहित में व्यक्तिगत हितों को त्याग सके।
(19) अपनी संस्कृति के संरक्षण में योगदान दे सके।
(20) अनुशासन कायम रखने में मदद कर सके।

15

गणित की पाठ्य-पुस्तक

[TEXT-BOOK OF MATHEMATICS]

पाठ्य-पुस्तक की आवश्यकता (Need of Text-Book)—प्रत्येक विषय में पाठ्य-वस्तु का होना अनिवार्य होता है। पाठ्य-पुस्तक में, विषय का संगठित (Organized) ज्ञान, एक स्थान पर रखा जाता है। पाठ्य-पुस्तक के द्वारा छात्रों तथा अध्यापकों को ज्ञात होता है कि अमुक कक्षा हेतु कितनी पाठ्य-सामग्री या वस्तु का अध्ययन तथा अध्यापन करना आवश्यक है। पाठ्य-पुस्तक के आधार पर कक्षा-कार्य तथा छात्रों का मूल्यांकन (Evaluation) सम्भव होता है। पाठ्य-वस्तु के आधार पर प्रत्येक राज्य (State) में हर एक निश्चित पाठ्य-वस्तु का अध्यापन सम्भव होता है जिससे छात्रों का मूल्यांकन एक निश्चित पाठ्य-वस्तु के आधार पर किया जा सकता है। पाठ्य-पुस्तक के निर्माण में भिन्न-भिन्न आवश्यक सिद्धान्तों को ध्यान में रखा जाता है। गणित की पाठ्य-पुस्तक निर्माण हेतु निम्न सिद्धान्तों को ध्यान में रखा जाता है—

(1) पाठ्य-पुस्तक की सामग्री का आधार उस कक्षा के हेतु तैयार किया गया पाठ्यक्रम होना चाहिए। इसलिए पाठ्य-पुस्तक लिखने से पहले उस कक्षा का पाठ्यक्रम निर्धारित कर लेना चाहिए। पाठ्यक्रम के पश्चात् पाठ्य-वस्तु (Content) का चयन करना आवश्यक होता है। एक बार पाठ्य-वस्तु छाँटने पर पाठ्य-पुस्तक लिखी जानी चाहिए।

(2) पाठ्य-पुस्तक में गणित के आधारभूत ज्ञान; जैसे मुख्य-मुख्य तथ्य (Facts) तथा सिद्धान्तों (Principles) को ध्यान में रखा जाना चाहिए। ये तथ्य तथा सिद्धान्त कक्षा के स्तर से अधिक जटिल न हों। इसके साथ-ही-साथ मुख्य-मुख्य सिद्धान्तों का आधार पिछली कक्षा में प्रयोग पाठ्य-वस्तु के तथ्य हों। प्रत्येक कक्षा की पाठ्य-वस्तु में प्रयोग, तथ्य तथा सिद्धान्तों का आपस में सम्बन्ध होना चाहिए ताकि गणित के ज्ञान का स्वरूप एक सम्पूर्ण (Whole) इकाई के रूप में हो। इस प्रकार का संगठित ज्ञान छात्र भली प्रकार समझ सकते हैं तथा उसका दैनिक जीवन में प्रयोग कर सकते हैं।

(3) पाठ्य-पुस्तक का तीसरा सिद्धान्त यह हो कि उसमें दी गयी पाठ्य-वस्तु का दैनिक जीवन से सम्बन्ध हो। लेखक को पाठ्य-वस्तु को पुस्तक में इस रूप में रखना चाहिए जिससे छात्र उसका दैनिक जीवन में प्रयोग कर सकें। इसके

साथ-ही-साथ जटिल ज्ञान को पुस्तक में न दिया जाये। पुस्तक में प्रश्नों के दिये गये हल सही हों जिससे प्रश्नों के सही उत्तरों के आधार पर छात्रों में विषय के प्रति रुचि पैदा हो जाये।

(4) पाठ्य-पुस्तक में केवल उन्हीं सिद्धान्तों तथा नियमों (Principles and Rules) का उल्लेख न हो जो कि पहले निर्धारित हो गयी हों बल्कि पुस्तक में नवीन खोजों के आधार पर जो तथ्य (Facts) और प्रत्यय (Concepts) सम्मुख आते हैं उनका उल्लेख भी होना चाहिए। इससे छात्रों में रुचि तथा जिज्ञासा उत्पन्न होगी और वे नवीन समस्याओं को हल करने की भी कोशिश करेंगे। आजकल गणित की पुस्तक में आधुनिक गणित (Modern Maths) का प्रयोग विशेष रूप से आवश्यक है।

(5) पाठ्य-पुस्तक की सामग्री का विकास एक तर्कसंगत रूप (Logical Order) में होना चाहिए जिससे छात्र विषय-ज्ञान को भली-प्रकार समझ सकें। यह निश्चित क्रम विषय के ऐतिहासिक दृष्टिकोण को ध्यान में रखकर करना चाहिए, जैसे कक्षा 8 में पहले 'अनुपात' और 'समानुपात' के अध्याय को रखना उपयुक्त होगा।

(6) पाठ्य-पुस्तक में पाठ्य-वस्तु (Content) को छोटे-छोटे अध्यायों (Chapters) में बाँटना चाहिए तथा प्रत्येक अध्याय के ज्ञान के आधार पर खण्ड हों। इस प्रकार के विभाजन से छात्रों को गणित का ज्ञान एक क्रम व सही रूप में हो सकेगा।

(7) प्रत्येक अध्याय के अन्त में प्रश्न होने चाहिए। इसके साथ-साथ कुछ समस्याएँ (Problems) तथा अभ्यास (Exercises) हों, जिनको छात्र अध्याय की समाप्ति पर हल करें। ये समस्याएँ तथा अभ्यास एक क्रम में हों ताकि छात्र पुस्तक सामग्री को भली प्रकार समझ लें। इनके द्वारा पाठ्य-वस्तु की पुनरावृत्ति सम्भव हो सकती है।

(8) पाठ्य-पुस्तक में प्रयोग की गयी वस्तुएँ जैसे—तथ्य (Facts), सूत्र (Formule), समीकरण (Equations), प्रत्यय (Concepts), सम्बन्ध (Relationship) आदि की भली-भाँति व्याख्या की जानी चाहिए। यदि छात्र इनको सही रूप में समझ जायें तो उनको समस्त पाठ्य-वस्तु समझने में कठिनाई नहीं होगी।

(9) गणित की पाठ्य-पुस्तक में उदाहरण स्पष्ट होने चाहिए। इसके साथ-ही-साथ रेखाचित्र, आँकड़ों की तालिका आदि भी उपयुक्त स्थान पर हों जिससे छात्र उनको आसानी से पढ़ सकें।

(10) प्रत्येक पाठ्य-पुस्तक में भाषा, अंक और रेखाचित्र आदि का प्रयोग छात्रों के स्तर को ध्यान में रखकर करना चाहिए।

(11) पाठ्य-पुस्तक के निर्माण में विषय के दक्ष लोग (Expert of the Subject) तथा अनुभवी अध्यापकों (Experienced Teachers) का योगदान होना चाहिए। इसके अतिरिक्त भिन्न-भिन्न देशों में प्रयोग की जाने वाली पाठ्य-पुस्तकों का देश की स्थिति तथा आवश्यकताओं को सम्मुख रखकर अनुवाद किया जाय तो लाभप्रद होगा।

(12) उपर्युक्त सिद्धान्तों के अतिरिक्त पाठ्य-पुस्तक की छपाई, उसमें प्रयोग होने वाला कागज, अक्षरों तथा अंकों की बनावट तथा मोटाई आदि, रेखाचित्र तथा अन्य प्रकार के चित्र, पुस्तक का आवरण आदि का ध्यान रखना भी आवश्यक होता है। साथ-ही-साथ उच्च कक्षाओं में प्रयोग की जाने वाली गणित की पाठ्य-पुस्तक में कुछ देश तथा विदेशों के गणितज्ञों का उल्लेख भी होना चाहिए। इससे छात्रों में विषय के प्रति रुचि तथा जिज्ञासा पैदा होती है।

कोठारी आयोग (Kothari Commission) ने पाठ्य-पुस्तकों के बारे में अपना मत निम्न प्रकार दिया है—यह बड़े दुर्भाग्य की बात है कि हमारे देश में पाठ्य-पुस्तकों के निर्माण हेतु उपयुक्त ध्यान नहीं दिया गया है। पाठ्य-पुस्तकों के विश्लेषण से यह पाया गया कि हमारे देश में अपनी भाषा में पाठ्य-पुस्तकों का बड़ा अभाव है तथा जो पाठ्य-पुस्तक उपलब्ध हैं वे भी बड़ी निम्न कोटि की हैं। इसके निम्नांकित कारण हैं—

(1) जो व्यक्ति विषय के विशेषज्ञ हैं उन्होंने कभी पाठ्य-पुस्तक लिखने के बारे में नहीं सोचा। परिणाम यह हुआ कि वे व्यक्ति इस कार्य को करने लगे जिनका स्तर निम्न कोटि का था और इस प्रकार पाठ्य-पुस्तकें भी एक निम्न तथा साधारण रूप में प्रकाशन में आयीं।

(2) पाठ्य-पुस्तक के चयन कराने में भिन्न-भिन्न कुप्रथाओं का होना।

(3) प्रकाशकों द्वारा अपनी पुस्तकों के चयन कराने में भिन्न-भिन्न कुरीतियों का प्रयोग करना।

(4) पुस्तकों के लिखने तथा तैयार करने में अनुसन्धान (Research) की कमी।

(5) प्रकाशकों द्वारा सस्ते नोट्स तथा प्रश्न-उत्तर रूप में पुस्तकों का प्रकाशन।

उपर्युक्त कमियों को दूर करने हेतु भिन्न-भिन्न राज्यों (States) ने पाठ्य-पुस्तकों के निर्माण में रुचि लेनी प्रारम्भ की है तथा कुछ पाठ्य-पुस्तकों को लिखने तथा छापने का कार्य भी किया है। किसी-किसी राज्य में प्राइमरी तथा किसी में मिडिल और सेकण्डरी कक्षाओं तक की पुस्तकें लिखी गयी हैं।

पाठ्य-पुस्तक के निर्माण हेतु ठोस कदम उठाये गये हैं जो निम्न हैं—

(1) देश के भिन्न-भिन्न भागों से विषय के अनुभवी तथा ज्ञाता (Experienced and Experts) एक स्थान पर बुलाये जायें तथा उनके विचारों के आदान-प्रदान के आधार पर पाठ्य-पुस्तकों का निर्माण किया जाय।

(2) पाठ्य-पुस्तक निर्माण में विदेशों से भी अनुभवी व्यक्तियों को आमन्त्रित किया जाय। यह कार्य 5 से 10 वर्ष के भीतर समाप्त हो जाना चाहिए।

(3) विद्यालय स्तर पर अपने देश के N. C. E. R. T. संगठन ने कुछ विषयों में देश के भिन्न-भिन्न भागों से कुछ अनुभवी व्यक्तियों की सहायता से पाठ्य-पुस्तकें तैयार की हैं। प्रत्येक राज्य (State) इन पाठ्य-पुस्तकों का प्रयोग कुछ आवश्यक परिवर्तन द्वारा करने में स्वतन्त्र है।

(4) पाठ्य-पुस्तक का निर्माण राष्ट्रीय स्तर पर होना चाहिए। इसके लिए देश में एक स्वतन्त्र संगठित विभाग की स्थापना की जानी चाहिए जो कि पाठ्य-पुस्तकों के निर्माण में सहायक हो। इसके साथ-ही-साथ भिन्न-भिन्न राज्यों में भी इस प्रकार के स्वतन्त्र विभाग की स्थापना होनी चाहिए।

पाठ्य-पुस्तक का मूल्यांकन (Evaluation of Text-book)

गणित की पाठ्य-पुस्तक तैयार होने के बाद उसका मूल्यांकन भी आवश्यक होता है। मूल्यांकन करने हेतु एक माप श्रेणी तैयार की जाती है। नीचे दिये हुए गुणों को ध्यान में रखकर उसके सम्मुख अंक प्रदान किये जाते हैं। अंकों के आधार पर पुस्तक का मूल्यांकन सम्भव होता है।

मूल्यांकन का आधार निम्न गुण हैं–

(1) पाठ्य-पुस्तक में पाठ्य-वस्तु का आधार मनोवैज्ञानिक है तथा उनका क्रम तर्क-संगत (Logical) है।

(2) पाठ्य-वस्तु कक्षा के छात्रों के अनुकूल है।

(3) पाठ्य-वस्तु छात्रों में स्थायी मूल्य (Values) पैदा करती है।

(4) पाठ्य-पुस्तक की सामग्री छात्रों के लिए उपयुक्त है।

(5) पाठ्य-पुस्तक की भाषा किस स्तर तथा प्रकार की प्रयोग की गयी है ?

(6) पाठ्य-पुस्तक में गणित की शब्दावली कैसी है ?

(7) पुस्तक में उपयुक्त प्रश्न, अभ्यास कार्य तथा छात्रों को हल करने के लिए समस्याएँ कैसी हैं ?

(8) पुस्तक में दिये गये उदाहरण (Examples) छात्रों के स्तर से अधिक कठिन तो नहीं है।

(9) पुस्तक में शिक्षा तथा गणित के प्राप्य उद्देश्यों (Objectives) की पूर्ति किस सीमा तक की गयी है ?

■■

16

गणित में प्रयोग-प्रायोजना

[EXPERIMENTAL PROJECT IN MATHEMATICS]

अन्य विषयों की भाँति गणित के क्षेत्र में भी प्रयोग-प्रायोजना (Experimental Project) एक विशेष स्थान रखती है। अब प्रश्न उठता है कि प्रयोग-प्रायोजना का क्या अभिप्राय है ? इसमें दो शब्द प्रयोग तथा प्रायोजना हैं। किसी भी प्रायोजना में यदि प्रयोग आ जायें तो ऐसी प्रायोजना को प्रयोग-प्रायोजना कहते हैं।

गणित-शिक्षक प्रतिदिन कक्षा में छात्रों को भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्नों को हल करने की विधियों से अवगत कराता है, परन्तु स्वयं की विषय में प्रगति हेतु वह अधिक नहीं कर सकता है। परन्तु प्रयोग-प्रायोजना द्वारा वह भिन्न-भिन्न कठिनाइयों को हल कर सकता है। इस प्रकार शिक्षक स्वयं कक्षा के छात्रों पर भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रयोग कर सकता है और उसके परिणामों के आधार पर अपनी शिक्षण-कला में सुधार कर सकता है।

इस प्रकार शिक्षक अपनी कक्षा में अनुसन्धान कर सकता है और अपने ज्ञान की वृद्धि कर सकता है। एक जिज्ञासु शिक्षक को अपने शिक्षण काल में नाना प्रकार की गणित-सम्बन्धी समस्याओं का सामना करना पड़ता है। यदि शिक्षक इन समस्याओं का हल प्रयोग द्वारा कर सके तो इस पद्धति को ही प्रयोग-प्रायोजना कहा जाता है। इस प्रकार प्रयोग करने में शिक्षक पूर्णरूप से स्वतन्त्र होता है और जिस समस्या को सम्मुख रखकर प्रयोग करता है, वह स्वयं उसकी अपनी कठिनाई होती है। इस कार्य में शिक्षक क्रियाशील रहता है तथा उसके ज्ञान की लगातार वृद्धि होती रहती है। प्रयोग-प्रायोजना द्वारा परिणाम शीघ्र प्राप्त हो जाते हैं जिससे शिक्षक को सहायता मिलती रहती है और परिणामों के आधार पर नयी समस्याओं का हल निकाला जाता है।

प्रयोग-प्रायोजना के पद (Steps in Experimental Project)–प्रयोग-प्रायोजना में पद निम्नलिखित क्रम में आते हैं।

(क) प्रस्तावना (Introduction)–इसके अन्तर्गत जिस समस्या पर कार्य या प्रयोग किया जाता है, उसका संक्षिप्त विवरण लिखा जाता है।

(ख) शीर्षक (Topic)–जिस समस्या पर प्रयोग किया जाता है उसको स्पष्ट तथा कम शब्दों में लिखा जाता है।

(ग) समस्या की व्याख्या (Stating the Problem)–इसमें समस्या का रूप तथा वह कैसे शिक्षक के सम्मुख पैदा हुई, उसको संक्षिप्त रूप में लिखा जाता है।

(घ) परिकल्पना (Hypothesis)—जब किसी प्रायोजना पर कार्य किया जाता है तो कुछ बातों को आधार मानकर प्रयोग आरम्भ किया जाता है। इसकी पुष्टि प्रायोजना की समाप्ति पर होती है। किसी भी प्रायोजना में एक या उससे अधिक परिकल्पना हो सकती है।

(ङ) सामग्री (Equipment and Material)—जो भी सामग्री प्रयोग में काम आती है, उसका नाम तथा विवरण लिखा जाता है।

(च) विधि (Procedure)—इस पद में उन सभी बातों का विस्तृत विवरण दिया जाता है जिनका उपयोग प्रयोग में किया गया हो।

(छ) आँकड़े एकत्र करना (Collection of Data)—उपर्युक्त प्रयोग करने में जो भी आँकड़े प्राप्त होते हैं, उनको एक क्रम में एक स्थान पर रखते जाते हैं।

(ज) परिणाम (Result)—उपर्युक्त प्राप्त आँकड़ों की व्याख्या करके परिणाम पर पहुँचा जाता है।

(झ) मूल्यांकन (Evaluation)—आँकड़ों द्वारा प्राप्त परिणामों का परिकल्पनाओं के आधार पर मूल्यांकन किया जाता है। इससे परिकल्पनाओं की पुष्टि हो जाती है।

(ट) परिणामों का नवीन परिस्थितियों में उपयोग (Follow-up Work)—यदि परिणामों द्वारा किन्हीं परिकल्पनाओं की पुष्टि होती है तो इसको अन्य क्षेत्रों में दोहराया जा सकता है।

(ठ) पठन सामग्री की सूची (Bibliography)—जो भी पुस्तकें तथा पत्रिकाएँ उपयुक्त प्रायोजना में काम में लायी गयी हों, उनकी सूची दी जाती है। इससे अन्य शिक्षकों को लाभ हो सकता है।

गणित में प्रयोग-प्रायोजना

गणित के क्षेत्र में शिक्षक के सम्मुख बहुत-सी समस्याएँ आती हैं; जैसे—छात्र गृह-कार्य नहीं करते हैं, छात्रों की प्रश्न हल करने की गति उपयुक्त नहीं है, छात्र रेखाचित्र में ठीक बनावट (Construction) नहीं कर सकते हैं या छात्र भिन्न-भिन्न विधियों से पढ़ाने पर भिन्न-भिन्न प्रकार से सीखते हैं, आदि; उदाहरण के रूप में, गणित की एक प्रयोग-प्रायोजना का विवरण नीचे दिया गया है—

(क) प्रस्तावना (Introduction)—शिक्षक गणित-शिक्षण की भिन्न-भिन्न विधियों से परिचित है तथा वह एक विशेष विधि को सबसे उत्तम समझता है। शिक्षक रेखा-गणित पढ़ाने के लिए विश्लेषण विधि की व्याख्यान विधि से तुलना करना चाहता है।

(ख) शीर्षक (Topic)—रेखागणित में विश्लेषण तथा व्याख्यान विधि की तुलना करना।

(ग) समस्या की व्याख्या (Stating the Problem)—शिक्षक रेखागणित पढ़ाने में भिन्न-भिन्न विधियों का प्रयोग करता है। शिक्षक के सम्मुख यह समस्या उत्पन्न हुई कि वास्तव में कौन-सी विधि अधिक उपयुक्त है, इसको ज्ञात करने के लिए उसने एक प्रयोग-प्रायोजना तैयार की।

(घ) परिकल्पना (Hypothesis)—रेखागणित पढ़ाने में विश्लेषण विधि व्याख्यान विधि से उत्तम है। या रेखागणित पढ़ने में छात्र व्याख्यान विधि की अपेक्षा विश्लेषण विधि में पदों को स्पष्ट रूप से समझते हैं।

(ङ) प्रयोग तथा सामग्री (Equipment and Material)

(1) बुद्धि परीक्षण के लिए परख।

(2) रेखागणित कार्य के ज्ञान हेतु साफल्य परख (Achievement Test in Geometry)।

(3) रेखागणित में चित्र खींचने के उपकरण।

(च) विधि (Procedure)—इस प्रायोजना में एक कक्षा के दो वर्ग (Section) किये जाते हैं, वर्गों को समान बनाने के लिए छात्रों की बुद्धि-लब्धि के तथा रेखागणित में तैयार साफल्य परख के अंकों को आधार माना जाता है। वर्ग बन जाने के पश्चात् रेखागणित की कुछ समस्याओं (Problems) का चयन किया जाता है। इसके बाद एक ही शिक्षक दोनों वर्गों में उपयुक्त समस्याओं को भिन्न-भिन्न विधियों अर्थात् एक वर्ग में विश्लेषण तथा दूसरे में व्याख्यान विधि से पढ़ाता है। समस्याओं के समाप्त होने पर एक साफल्य परख (Achievement Test) द्वारा दोनों वर्गों की परीक्षा ली जाती है। परीक्षा में प्राप्त अंकों की तुलना पिछले प्राप्तांकों से की जाती है। जिस वर्ग के प्राप्तांकों में अन्तर आता है, उसमें प्रयोग की हुई विधि दूसरे से अच्छी मानी जाती है।

(छ) आँकड़े एकत्रित करना (Collection of Data)—उपर्युक्त प्रायोजन में दोनों वर्गों के आरम्भ के अंक उनके मध्यमान तथा प्रयोग के बाद के अंक, उनके मध्यमान तथा मध्यमानों के अन्तर को लिखा जाता है।

(ज) परिणाम (Result)—प्रारम्भ तथा बाद के मध्यमानों के अन्तर की तुलना की जाती है। इसके आधार पर परिणाम प्राप्त होता है। उदाहरण नीचे दिया गया है—

	वर्ग 'अ'	वर्ग 'ब'	अन्तर
1. प्रयोग से पहले मध्यमान	45	47	2
2. प्रयोग के बाद मध्यमान	55	48	7

वर्ग 'अ' में विश्लेषण विधि तथा वर्ग 'ब' में व्याख्यान विधि का प्रयोग किया गया है। अन्तर अधिक होने के कारण यह कहा जा सकता है कि विश्लेषण विधि व्याख्यान विधि से उत्तम है।

(झ) मूल्यांकन (Evaluation)—उपर्युक्त आँकड़ों से स्पष्ट हो जाता है कि विश्लेषण विधि (Analytic Method) व्याख्यान विधि (Lecture Method) से उत्तम है। यह परिणाम हमारी परिकल्पना की पुष्टि करता है।

(ट) परिणामों का नवीन परिस्थितियों में उपयोग (Follow-up Work)—इसका अन्य कक्षाओं में उपयोग किया जा सकता है।

(ठ) पठन-सामग्री की सूची (Bibliography)—जो भी पुस्तकें तथा पत्रिका प्रयोग में लायी गयी हों, उनकी सूची पठन सामग्री की सूची होती है।

17

विशेष प्रकार के बालकों की शिक्षा तथा व्यवस्थित सामग्री

[TEACHING OF EXCEPTIONAL CHILDREN AND PROGRAMMED MATERIAL]

प्रत्येक विषय पढ़ाने में शिक्षक को भिन्न-भिन्न प्रकार की कठिनाइयों का सामना करना पड़ता है, इसमें पाठ्य-वस्तु (Subject-Matter) तथा छात्र प्रधान रूप से आते हैं। इसमें भी बालक का स्थान प्रमुख होता है। अन्य शिक्षकों के समान गणित शिक्षक को भी छात्रों को पढ़ाना पड़ता है। शिक्षक कक्षा में पाठ्य-वस्तु प्रस्तुत करने में सामान्य छात्रों की योग्यता (Ability of Average Students) को ध्यान में रखता है। इस प्रकार कक्षा के वे छात्र जो सामान्य से भिन्न होते हैं, उन छात्रों को विशेष लाभ नहीं होता है। इस प्रकार के बालक या तो प्रखर बुद्धि (Gifted) या पिछड़े (Retarded) होते हैं। ऐसे बालकों के लिए विशेष प्रबन्ध होना चाहिए।

उपर्युक्त बालकों के लिए गणित में क्या व्यवस्था की जाय, इसका वर्णन करने से पहले इन बालकों को जानना आवश्यक है, जिनके आधार पर इनको पहचाना जा सके। इस प्रकार बालकों के लिए विशेष पाठ्यक्रम की व्यवस्था सम्भव हो सकती है।

प्रखर बुद्धि वाले बालकों के गुण
(CHARACTERISTICS OF GIFTED CHILDREN)

(1) इन बालकों की बुद्धि-लब्धि (I. Q.) 130 से 180 या ऊपर होती है।

(2) ये बालक शारीरिक क्रियाओं में साधारण बालकों से तीव्र होते हैं।

(3) ये शब्दों तथा वाक्यों का अल्प आयु में ही प्रयोग करने लगते हैं। ये शीघ्र ही लम्बी शब्दावली तथा वस्तुओं के नाम याद कर लेते हैं।

(4) ये अधिक जिज्ञासु होते हैं तथा समय, दिन, घड़ी, वायु, वर्षा, मौसम तथा व्यक्तियों के बारे में नाना प्रकार के प्रश्न करते हैं।

(5) इन बालकों की रुचियाँ (Interests) बड़ी विस्तृत होती हैं तथा ये पत्रिकाओं, चित्रकारी, विज्ञान, गणित से सम्बन्धित वस्तुओं में रुचि रखते हैं।

(6) इनकी संख्या कक्षा में लगभग 2 से 7 प्रतिशत तक होती है।

(7) ये बालक हास्य तथा नवीन लेखों में सामान्य से तीव्र होते हैं।

(8) इन बालकों के मित्र प्रायः उनकी आयु से ऊपर वाले बालक होते हैं।

(9) ये बालक संवेगात्मक दृष्टि से स्थायी होते हैं तथा इनका व्यवहार अपने माता-पिता तथा कुटुम्बीजनों से अच्छा होता है।

(10) इनमें अल्प आयु से तर्क-शक्ति का ज्ञान दृष्टिगोचर होता है।

(11) ये बालक किसी वस्तु तथा विचार को अधिक समय तक अवधान (Attention) में रख सकते हैं।

प्रखर बुद्धि वाले बालक को पहचानने की विधियाँ
(MEANS OF RECOGNIZING THE GIFTED CHILD)

(1) बुद्धि परीक्षाएँ (Intelligence tests)

(2) साफल्य परीक्षाएँ (Achievement tests)

(3) निरीक्षण तथा शिक्षकों का निर्णय (Observation and decision of teachers)

(4) विद्यालय-लेखा (Cumulative records)

(5) व्यक्तित्व परीक्षाएँ (Personality tests)

(6) कक्षा के अन्य बालकों की राय (Opinion of class-mates)

प्रखर बुद्धि वाले बालकों की शिक्षा
(EDUCATION FOR THE GIFTED CHILDREN)

(1) विद्यालय में इन बालकों के लिए ऐसे कार्य होने चाहिए जिनसे वे सन्तुष्ट हो सकें, प्रत्येक बालक को एक विशेष कार्यक्रम दिया जाय।

(2) उनका पाठ्यक्रम सामान्य बालकों से भिन्न हो। इसमें गणित के अधिक जटिल प्रश्न तथा समस्याएँ होनी चाहिए।

(3) इनको स्वयं गणित की पुस्तकों को पढ़ने तथा गणित की प्रयोगशालाओं में कार्य करने का अवकाश देना चाहिए जिससे वे स्वयं समस्याओं का हल तथा सत्यापन कर सकें।

(4) इनको एक वर्ष में दो कक्षाएँ पढ़ायी जा सकती हैं जिससे वे सामान्य बालकों के दो वर्ष के कार्य को एक वर्ष में समाप्त कर लें।

(5) इन बालकों को भिन्न-भिन्न प्रकार के गणित सम्बन्धी कार्यों; जैसे—कार्डबोर्ड, लकड़ी, टिन आदि वस्तुओं से गणित के नियमों का सत्यापन करने का अवसर मिलना चाहिए। इनमें चतुर्भुज, वृत्त, त्रिभुज आदि के सूत्र ज्ञात करना आ सकता है।

(6) इन बालकों के लिए गणित की प्रयोगशाला का होना अति आवश्यक है तथा इनको पर्यटन (Excursion) में भी जाना चाहिए।

(7) इन बालकों के लिए व्यवस्थित सामग्री (Programmed Material) विशेष रूप से लाभप्रद होती है।

(8) इन बालकों के मूल्यांकन हेतु विशेष परख (Tests) का प्रयोग किया जाता है।

(9) गणित में ये बालक कठिन प्रायोजना (Projects) पर कार्य कर सकते हैं।

मानसिक दृष्टि से पिछड़े बालक
(MENTALLY RETARDED CHILDREN)

गुण (Characteristics)

(1) यह वह बालक है जो कक्षा के कार्य में पिछड़ा रह जाता है।

(2) इस बालक में जन्मजात मानसिक योग्यता सामान्य बालक (Average Child) से कम होती है।

(3) इस बालक में मानसिक विकास की गति कुछ मन्द होती है।

(4) यह बालक, समाज में भली प्रकार समायोजन (Adjust) नहीं कर सकता है।

(5) संवेगात्मक दृष्टि से यह सामान्य बालक के समान होता है।

पिछड़े बालकों की शिक्षा
(EDUCATION FOR THE RETARDED CHILDREN)

(1) इन बालकों को गणित पढ़ाने के लिए साधारण उपकरण तथा चार्ट की विशेष व्यवस्था होनी चाहिए।

(2) इनके लिए गणित के छोटे तथा सरल प्रयोग करने की व्यवस्था होनी चाहिए।

(3) इनको सामान्य पाठ्यक्रम से सरल प्रश्न हल करने को देने चाहिए।

(4) प्रत्येक ऐसे बालक को भिन्न-भिन्न प्रकार की समस्या तथा प्रश्न देने चाहिए।

(5) इनके लिए अभ्यास (Drill) के लिए अधिक संख्या में प्रश्न हों।

(6) इनके लिए विशेष कक्षाओं की व्यवस्था लाभप्रद होती है।

(7) पुस्तकों में चित्र तथा रंगीन अंक के होने से लाभ होता है।

(8) इनकी रुचि के अनुसार छोटी-छोटी गणित की प्रायोजनाएँ (Projects) देनी चाहिए।

(9) बालकों को व्यवस्थित सामग्री (Programmed Material) तैयार करके देना चाहिए।

गणित में व्यवस्थित सामग्री
(PROGRAMMED MATERIAL IN MATHEMATICS)

किसी प्रोग्राम में सामग्री को छोटे-छोटे पदों में बाँटा जाता है तथा प्रत्येक पद पर एक प्रश्न पूछा जाता है। सभी व्यवस्थित सामग्री का आधार सीखने का सिद्धान्त होता है।

व्यवस्थित सामग्री के गुण

(क) छोटे पद (Small Steps)—इसमें छोटे-छोटे पद होने चाहिए।

(ख) बालक क्रियाशील हों (Active Participation)—बालक लगातार प्रोग्राम में क्रियाशील रहें। प्रत्येक पद के बालक उत्तर दें तथा आगे के प्रोग्राम को तब तक हल न करें जब तक पहला प्रोग्राम हल न कर लें।

(ग) परिणाम का ज्ञान (Knowledge of Results)—जैसे ही बालक उत्तर दे, उसको ज्ञात हो जाय कि उसका उत्तर सही है या गलत।

(घ) स्वयं उन्नति (Self-placing)—प्रत्येक बालक अपनी क्षमता के आधार पर आगे बढ़ता है। इस प्रकार न तो उसे कमजोर बालक के लिए रुकना पड़ता है और न तीव्र बालक उसके लिए रुकते हैं। इस प्रकार प्रत्येक बालक अपनी क्षमता के अनुसार कार्य करता है।

व्यवस्थित सामग्री तैयार करने हेतु पद
(STEPS FOR PREPARATION OF PROGRAMMED MATERIAL)

(क) उप-विषय का छाँटना (Selection of the Topic)—उप-विषय ऐसा छाँटना चाहिए जिसमें एक घण्टे से अधिक समय न लगे तथा अधिक प्रत्यय (Concepts) न हो।

(ख) सामान्य व्याख्या लिखना (Writing a General Statement) —इन पदों में हम काफी गहराई तक जाते हैं। इनमें छात्रों की आयु, लिंग, चातुर्य (Skills), रुचियों आदि को ध्यान में रखा जाता है।

(ग) उद्देश्यों की व्यावहारिक पदों में व्याख्या करना (Defining Objectives in Behavioural Terms) —अपने प्रोग्राम को इस रूप में दिखाना कि जिससे यह ज्ञान हो जाये कि छात्रों ने उद्देश्यों की पूर्ति किस सीमा तक की है। उद्देश्यों की व्याख्या करना सबसे कठिन पद होता है।

(घ) आवश्यक चातुर्यों की व्यावहारिक पदों में व्याख्या करना (Defining Prerequisite Skills in Behaviour Terms)—इस पद में छात्रों के अनुभवों तथा चातुर्य को प्रोग्राम तैयार करने से पहले ध्यान में रखा जाता है। इसी आधार पर छात्र प्रोग्राम में कार्य कर सकेगा।

(ङ) प्रारम्भिक परख तैयार करना (Writing a Criterion Test)—इसके आधार पर अपने उद्देश्यों को सुचारु रूप में रख सकते हैं। विषय-वस्तु को किस प्रकार संगठित किया जाये जिससे प्रोग्राम तैयार करने में कठिनाई न हो।

(च) विषय-वस्तु को छाँटना तथा तैयार करना (Developing a List of Contents)—इस पद में विषय-वस्तु से प्रत्यय छाँटना तथा उसको एक क्रम में रखना पड़ता है। एक प्रत्यय तथा उसके बाद दूसरे में सम्बन्ध देखना।

उपर्युक्त पदों की पूर्ति के पश्चात् ही प्रोग्राम सामग्री लिखनी चाहिए।

नीचे गणित के क्षेत्र से उदाहरण प्रस्तुत है जो कि व्यवस्थित सामग्री या प्रोग्राम का ज्ञान देता है—

उदाहरण—1
बीजगणित—गुणनफल

(1) य, य के गुणनफल को सूक्ष्म रूप में य^2 लिख सकते हैं। इस प्रकार र, र, र के गुणनफल को र^3 के रूप में लिखा जा सकता है।

....

(2) ब, ब, ब के सतत गुणनफल को सूक्ष्म रूप में .... लिखा जा सकता है।

.... ब^3

(3) ब, ब, ब, ब के सतत गुणनफल को ब⁴ सूक्ष्म रूप में लिखा जा सकता है। ब, ब, ब, ब, ब के सतत गुणनफल को सूक्ष्म रूप में .... लिख सकते हैं।

.... $ब^5$

(4) ब, ब, ब, ब, ब, ब के गुणनफल को सूक्ष्म रूप में .... लिख सकते हैं।

.... $ब^6$

(5) स, स, स, स, स के गुणनफल को सूक्ष्म रूप में .... लिख सकते हैं।

.... $स^5$

(6) च, च, च को सूक्ष्म रूप में .... लिख सकते हैं ?

.... $च^3$

(7) जब किसी संख्या को बार-बार उसी संख्या से गुणा किया जाता है तो गुणनफल उस संख्या का घात कहलाता है, जैसे—क × क को 'क' का दूसरा घात कहते हैं। इसे $क^2$ लिखते हैं।

(8) ख × ख × ख को ख का तीसरा घात कहते हैं और $ख^3$ लिखते हैं। इसी प्रकार म × म × म को म का .... घात कहते हैं और सूक्ष्म रूप में $म^3$ लिखते हैं।

.... तीसरा

(9) य × य × य × य को य का चौथा घात कहते हैं और .... लिखते हैं।

.... $य^4$

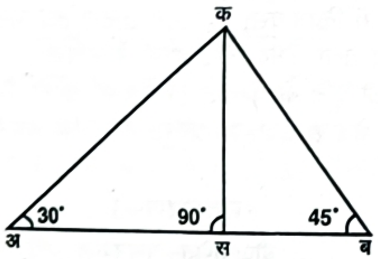
(10) संख्या य के दाहिने सिरे पर ऊपर 4 का अंक लिख दिया जाय तो $य^4$ प्राप्त होगा। यह पद य का .... घात है।

.... चौथा

रेखागणित

1·1—किसी बिन्दु से किसी रेखा की दूरी लम्बवत् नापी जाती है, निम्न चित्र में बिन्दु **क** से **अ ब** के साथ क्रमशः 30, 45 तथा 90 अंश के कोण बनाती हुई रेखायें **क अ, क ब** तथा **क स** खींची गयी हैं। अतः बिन्दु **क** की **अ ब** से दूरी .... रेखा है।

क स ....

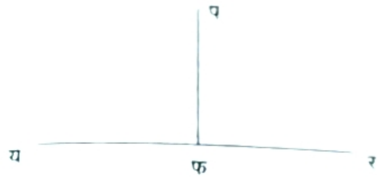


1·2—**क स** रेखा बिन्दु **क** की **अ ब** से दूरी व्यक्त करती है, अतः बिन्दु **स** पर बनने वाले कोणों **क स अ** तथा **क स ब** में प्रत्येक का मान होगा।

90° समकोण ....

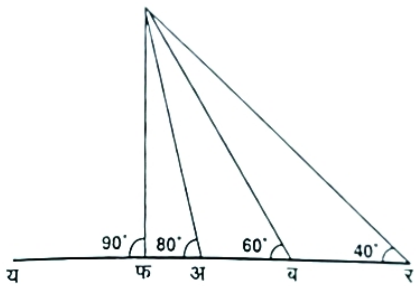
1·3—यदि **प फ** रेखा बिन्दु **प** की **य र** से दूरी प्रदर्शित करे ∠**प फ य** तथा ∠**प फ र** में से प्रत्येक .... होगा।

90° समकोण ....



1·4—**य र** रेखा पर **प** से **प फ, प अ, प ब, प र** आदि रेखायें खींची गयी हैं जो **य र** के साथ चित्रानुसार कोण बनाती हैं, इन रेखाओं में बिन्दु **प** की **य र** से दूरी .... रेखा है।

प फ ....

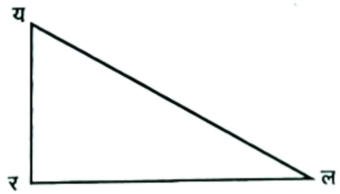


1·5—बिन्दु **ग** की **क ख** रेखा से दूरी **ग ख** रेखा है, बिन्दु **क** की **ग ख** रेखा से दूरी .... रेखा है।

क ख ....

1·6—समकोण त्रिभुज **य र ल** में बिन्दु **य** की **र ल** रेखा से दूरी .... रेखा है।

य र ....



1·7—उपर्युक्त चित्र में बिन्दु **ल** की **य र** रेखा से दूरी .... रेखा है।

र ल ....

■■

18

अंकगणित पढ़ाने की विधि

[TEACHING METHOD OF ARITHMETIC]

16वीं शताब्दी से पहले अंकगणित के अन्तर्गत दो भिन्न-भिन्न रूपरेखाएँ थीं—एक तो, अंकों का ज्ञान (Science Numbers) तथा दूसरी, हल करने की कला (Art of Computing)। परन्तु 16वीं शताब्दी के पश्चात् अंकगणित के दोनों रूप अंकों का ज्ञान तथा हल करने की कला—आवश्यक समझे जाने लगे। ये दोनों अंकगणित के ही अन्तर्गत समझे गये। इसलिए अध्यापकों को अंकगणित विषय पढ़ाने में दोनों ही बातों पर समान रूप से जोर देना चाहिए। पाठन-विधि का मुख्य उद्देश्य—सिद्धान्त का समझना, सम्बन्ध समझना और सिद्धान्त का प्रयोग करना होना चाहिए।

अंकगणित पढ़ाने के कुछ प्राप्य उद्देश्य (Some Objectives of Teaching Arithmetic)

(1) विद्यार्थी को इस प्रकार के विचारों से परिचित कराया जाय कि वह अंकगणित सम्बन्धी तथ्यों (Statements) को ठीक तौर पर समझ सके। इसके साथ-ही-साथ विद्यार्थी में विश्लेषण (Analysis) करने की तथा उसके द्वारा सही परिणामों पर पहुँचने की क्षमता पैदा हो जाय।

(2) विद्यार्थी में अपने वातावरण में होने वाली भार तथा नाम सम्बन्धी घटनाओं के कारणों में रुचि उत्पन्न करना।

(3) बालक को अंकगणित की आधारभूत क्रियाओं में प्रयोग आने वाले साधारण जोड़, बाकी आदि में शुद्धता का ज्ञान कराना।

(4) बालक को प्रयोगात्मक (Practical) अंकगणित के जीवन-सम्बन्धी ज्ञान को समझने तथा हल करने का अवकाश देना।

(5) बालक को इस स्थिति में उच्च गणित समझने हेतु नींव डालना।

अंकगणित पढ़ाने के सामान्य नियम (General Rules of Teaching Arithmetic)

(1) यह बात सही है कि यदि अध्यापक एक समय में एक से अधिक ज्ञान नहीं समझा सकता है तो बालक उसकी अपेक्षा कहीं कम ज्ञान हजम कर सकता है। प्रारम्भ में अंकगणित पढ़ाते समय बालकों को अधिक तथा बारीक (Minute) आदेश नहीं देना चाहिए। अध्यापक को चाहिए कि पाठ सम्बन्धी सामान्य नियमों को वह

बालकों को बता दे तथा पाठ के अन्तर्गत जो बारीक तथा सूक्ष्म नियम आते हों, उनको बालक स्वयं ढूँढे।

(2) गणित की शिक्षा में समझने की शक्ति को बढ़ाना, ज्ञान प्राप्त करने की अपेक्षा अधिक आवश्यक समझा जाता है। इसलिए पाठ समझाते समय अध्यापक को बार-बार सहायता नहीं देनी चाहिए। कक्षा में विद्यार्थियों की क्षमता (Capacity) में अन्तर होता है, इसलिए शिक्षक को विद्यार्थियों की आवश्यकतानुसार सहायता देना लाभप्रद होता है। बहुत अधिक सहायता की तरह बहुत निम्न सहायता भी हानिकारक होती है।

(3) उपर्युक्त सिद्धान्त (Principle) का सहयोग भी अभ्यास (Drill) कार्य होता है। जहाँ तक हो सके, अभ्यास कार्य में भी कम-से-कम सहायता देनी चाहिए, उदाहरण के लिए—यह इस प्रकार किया जा सकता है कि किस प्रश्न में कहाँ पर अशुद्धि है और कहाँ पर यह कहना पर्याप्त होगा कि यह गलत है, इसको दोहरा लो आदि। प्रश्न हल करने में जो अशुद्धि हो, उसके निवारण हेतु उसी ढंग का एक दूसरा प्रश्न हल करने को दे देना चाहिए। इस तरह बालक को स्वयं अपनी अशुद्धि का ज्ञान हो जायेगा।

(4) शुद्धि (Correction) करने में भी अध्यापक और विद्यार्थी—दोनों को किसी प्रकार का भार न समझना चाहिए। यह सदैव असम्भव है कि प्रत्येक प्रश्न सही रूप से हल किया जा सके। यदि प्रश्न करने में सम्पूर्णतः अशुद्धि होती है तो इसका मतलब यह होगा कि बालक प्रश्न को बिल्कुल नहीं समझे हैं या उसको समझाने में अध्यापक ने किसी सिद्धान्त की अशुद्धि की है। ऐसे प्रश्नों को अध्यापक को स्वयं समझकर फिर से दोहरा लेना अनिवार्य होगा।

(5) अंकगणित के विशेष महत्त्व (Importance) का अन्त हो जाता है, यदि यह न समझा जाय कि अंकगणित में गणना (Computation) का स्थान महत्त्वपूर्ण तथा आवश्यक है। इस गुण पर ध्यान न देने से गणित की शुद्धता (Accuracy), क्रमशीलता (Orderliness) नहीं रह पाती है। प्रश्न हल करने में जो बुरी आदतें (Habits) पड़ जाती हैं, उनका जीवन पर बुरा प्रभाव पड़ जाता है जिससे गणित के उद्देश्यों की पूर्ति नहीं हो पाती है।

(6) अंकगणित प्रारम्भ करने में अध्यापक को गणना में मौखिक अभ्यास देना चाहिए। इसके पश्चात् शीघ्रता (Speed) तथा शुद्धता (Accuracy) का अभ्यास, धीरे-धीरे जोड़ने (Addition), घटाने (Subtraction) और गुणा (Multiplication) के द्वारा दिया जा सकता है। इसके लिए थोड़ा समय होना चाहिए। प्रत्येक अभ्यास का कार्य, क्रम में तथा निरन्तर होना चाहिए। इस तरह के कार्य से बालकों में दृढ़ इच्छा शक्ति (Power) उत्पन्न हो जाती है जिसके आधार पर दैनिक जीवन के कार्यों को समझना सरल हो जाता है।

(7) अंकगणित में जो गणना की जाती है, उसके अन्तर्गत जो अभ्यास-कार्य किया जाता है, वह अधिक रुचिकर हो सकता है, यदि विद्यार्थी को प्रश्न पूछने का अवसर दिया जाय। इस तरह विद्यार्थी स्वयं अपनी रुचि के अनुसार अभ्यास-कार्य करेंगे।

(8) लिखित कार्य (Written Work) में प्रारम्भ से ही इस बात पर बल दिया जाना चाहिए कि उसका कार्य उपयुक्त ढंग (System) से तथा साफ (Clear) हो। साधारण रूप से प्रश्नों को दो श्रेणियों में विभाजित किया जा सकता है। एक तो वह जिसमें गणना का मुख्य स्थान होता है, और दूसरी वह जिसमें तर्क का विकास अधिक महत्त्वपूर्ण होता है। प्रथम श्रेणी के प्रश्नों में प्रश्न का हल पृष्ठ के मध्य में तथा द्वितीय श्रेणी के प्रश्नों में प्रश्न के आवश्यक तर्क सम्बन्धी वाक्य मध्य भाग में होने चाहिए तथा उसके अन्तर्गत किया गया हल पृष्ठ के किनारे वाले भाग में स्वच्छ रूप से होना चाहिए।

(9) गणना का कार्य कभी भी कच्चे काम (Rough Work) के रूप में नहीं किया जाना चाहिए। इससे बालकों में उसको कच्चे रूप में करने की आदत पड़ जाती है। इस प्रकार रेखागणित (Geometry) में भी चित्र (Figure) का कच्चा रूप नहीं होना चाहिए।

(10) प्रश्न को हल करने में काट-छाँट (Cancellation) साफ होनी चाहिए। इस तरह प्रश्न के हल में कुछ चिन्ह; जैसे– n और $\sqrt{2}$ आदि को अन्त पद तक रखना चाहिए।

(11) प्रत्येक प्रश्न को हल करने में भाषा साधारण तथा सही होनी चाहिए। प्रश्न का परिणाम स्पष्ट लिखा होना उचित होता है। उत्तर की इकाई (Unit) अवश्य होनी चाहिए। समस्या प्रश्नों में उत्तर एक सम्पूर्ण वाक्य में होना चाहिए।

(12) सम्पूर्ण पाठन-विधि का उद्देश्य तथा आधार सरल (Simple) और स्थूल (Concrete) उदाहरणों से प्रारम्भ होकर सिद्धान्त-निरूपण (Generalization) पर समाप्त होना चाहिए। विद्यार्थियों को इन नियमों को भली-भाँति समझने हेतु इनका प्रयोग करना चाहिए। जब कभी गणित का कोई नवीन नियम पढ़ाया जाय तो यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि प्रथम उदाहरण सरल प्रकृति का हो तथा उसको हल करने में कठिनाई न हो। किसी प्रश्न के पदों के बीच-बीच में तथा प्रश्नों के पश्चात् सामान्य उदाहरणों का प्रयोग करने से छोटे बालकों की रुचि बनी रहती है।

(13) उदाहरण देने में इस बात का ध्यान रखा जाना चाहिए कि वह बालकों तथा विद्यालय के अनुकूल हों, कक्षा में पढ़ाई गई गणित का सम्बन्ध बालकों के जीवन से होना चाहिए। छोटे बालकों को दिये गये उदाहरण उनके खेल तथा रुचि के अनुकूल हों।

अंकगणित में अभ्यास का स्थान (Drill Work in Arithmetic)

यदि अंकगणित में अभ्यास पर्याप्त रूप से नहीं हो पाता है तो उसका दैनिक जीवन में कोई उपयोग नहीं होता है। इस हेतु विषय में और विषयों की अपेक्षा अधिक अभ्यास होना आवश्यक है। परन्तु अभ्यास में दो बातें बड़ी ध्यान देने की हैं एक तो यह है कि अभ्यास-कार्य बिल्कुल स्पष्ट हो तथा उसको धीरे-धीरे छोटे-छोटे खण्डों में दिया जाय। यदि कक्षा यह आवश्यकता समझती है कि वह कार्य पाठ के आरम्भ में होना चाहिए और बालक उस कार्य में रुचि रखते हैं तो इस तरह के अभ्यास का कार्य सदा आरम्भ में उचित रहेगा। अभ्यास का समय निश्चित (Limited) होना चाहिए। किसी भी पाठ में इसके लिए अधिक समय देना उचित नहीं

होता है। साधारणतः एक अन्तर (Period) में अभ्यास के लिए पाँच से दस मिनट पर्याप्त है। अभ्यास-कार्य के देने में इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि कक्षा का प्रत्येक विद्यार्थी उसको रुचि से करता है तथा नियत समय में समाप्त भी कर सका है या नहीं। शीघ्र समाप्त करने वाले बालकों के लिए उनकी आवश्यकतानुसार कार्य अधिक देना चाहिए। अभ्यास के लिए प्रश्नों का क्रम सरल से कठिन की ओर होना चाहिए ताकि मन्द बुद्धि बालक भी कक्षा में कुछ प्रश्न अवश्य हल कर सकें।

अभ्यास-कार्य को सुविधा के अनुसार कक्षा में या कक्षा के पश्चात अध्यापक को जाँच लेना चाहिए। यह क्रम भिन्न-भिन्न प्रकार के प्रश्नों में भिन्न-भिन्न होता है। सबसे आवश्यक यह है कि अभ्यास-कार्य की जाँच अवश्य होनी चाहिए।

अभ्यास-कार्य में आवश्यक विचार तथा तैयारी की विशेष रूप से आवश्यकता होती है। इसके लिए गणित अध्यापक को स्वयं यह सोच लेना चाहिए कि उसको बालकों से किस प्रकार के प्रश्नों के अभ्यास कराने आवश्यक हैं। इसके लिए उसको पुस्तक में दिये गये प्रश्नों पर चिन्ह लगा लेने चाहिए, ताकि उसको अभ्यास में प्रश्न देने के समय आसानी हो।

अभ्यास के द्वारा गणित के तथ्यों (Facts) का मस्तिष्क में प्रवेश होता है तथा उनकी स्थिरता बन जाती है। जब तथ्यों के साहचर्य (Associations) स्थिर रूप धारण कर लेते हैं तो वह तथ्य सदा के लिए अपना बन जाता है। इस तरह अभ्यास का पाठ्य-वस्तु सीखने में प्रमुख स्थान होता है। अभ्यास के विचारों का प्रत्यास्मरण (Recall) होता है।

अभ्यास करते समय ध्यान में रखने योग्य बातें–

(1) प्रथम बार के विचारों में शुद्धता होनी चाहिए।

(2) इन विचारों को स्पष्ट (Vivid) होना चाहिए।

(3) साहचर्य (Associations) को दोहराना चाहिए।

(4) नवीन साहचर्य पर ध्यान देना चाहिए।

(5) अभ्यास कार्य करते समय उपयुक्त प्रेरणा (Motivation) मिलती रहनी चाहिए।

(6) अभ्यास करते समय विद्यार्थी अनुमान (Guess) लगाकर प्रश्न हल न करे, बल्कि समझ कर हल करें।

(7) अभ्यास-कार्य के बीच में किसी प्रकार की बाधा न हो।

(8) अभ्यास-कार्य अधिक समय के लिए न दिया जाए।

अंकगणित में गति तथा शुद्धता (Speed and Accuracy in Arithmetic)

अंकगणित सम्बन्धी गणित और शुद्धता एक विशेष आयु के बीच ध्यान में रखनी पड़ती है। इसका ध्यान 9 और 10 वर्ष की आयु के बीच रखना चाहिए। इस अवस्था में अधिक कार्य मौखिक तथा कुछ लिखित होना चाहिए।

10 वर्ष के बालकों को अपनी अंगुलियों की सहायता से संख्या न गिनने देना चाहिए। इसके अतिरिक्त 40 मिनट के अन्तर (Period) में मौखिक कार्य 5 मिनट आरम्भ में तथा 5 मिनट अन्त में होना लाभप्रद होता है। इस तरह का कार्य प्रतिदिन

होना चाहिए। इसके द्वारा एक आवश्यक गति तथा शुद्धता का ज्ञान बालकों में पैदा हो जायेगा और इस तरह प्रश्न हल करने में दोनों बातों पर उनका ध्यान रहेगा। कुछ समय तक इस तरह के कार्य करने से गति और शुद्धता उसकी आदत में आ जायगी। मौखिक कार्य के बीच में कभी-कभी लिखित कार्य भी दिया जाना चाहिए।

कुछ मौखिक क्रियाओं का पाठन (Teaching of Some Basic Concepts)

अंक ज्ञान (Number Concept)—अंकगणित में अंकों का ज्ञान एक आधारभूत प्रक्रिया है। इसके ज्ञान में स्थूल वस्तुओं (Concrete Object) का प्रयोग अधिक आवश्यक होता है। बालकों को अपने खेलने की वस्तुओं के प्रयोग से अंकों का ज्ञान देना लाभप्रद होता है। इनके ज्ञान में किसी तरह का रटना न होना चाहिए।

अंक ज्ञान में निम्न क्रम से बढ़ना चाहिए—

(क) वास्तविक वस्तु द्वारा (Object Stage)—इसमें बालक को काँच की गोलियाँ, पत्थर के टुकड़े आदि गिनना, सीखना होता है।

(ख) तस्वीर द्वारा (Picture Stage)—वास्तविक वस्तु के स्थान पर चित्र गिनने के ज्ञान में प्रयोग किया जाता है।

(ग) अर्द्ध-वास्तविक वस्तु द्वारा (Semi-concrete Objects)—इस स्थिति में गिनने का ज्ञान वृत्त (Circle), रेखा (Line), बिन्दु (Points) आदि के प्रयोग द्वारा होता है।

(घ) बिना वस्तु द्वारा (Abstract Stage)—इस स्थिति में बालक को वस्तु की अनुपस्थिति में भी अंकों का ज्ञान तथा उनको गिनने का ज्ञान होता है। जब वह 'चार' के अंक का प्रयोग करता है तो वह 4 अंक के बारे में भी समझता है। 4 के चिन्ह का चार के प्रत्यक्ष (Concept) से सम्बन्ध होना ही वस्तु की अनुपस्थिति में अंक का ज्ञान करना कहलाता है।

जोड़ना (Addition)—जोड़ प्रारम्भ करने के पहले अंक गिनने की क्षमता का पूर्ण विकास होना अनिवार्य है। जब बालक स्वयं जोड़ने की आवश्यकता समझे तो उसको अंकों के आधारभूत सम्बन्ध समझने का अवकाश देना चाहिए। अंकों के समन्वय (Combination) को पढ़ाने में निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(अ) सम्बन्ध को दो भागों में बाँटा जाता है। प्रथम वह, जिसमें 10 या उसके नीचे के अंक आते हैं, और दूसरा वह, जिसमें 10 से ऊपर के अंक सम्मिलित हैं।

(ब) सम्बन्धों के पढ़ाने में सरल अंक पहले तथा कठिन अंक बाद में आना चाहिए; जैसे—7 को 1 में जोड़ना है तो उसको बजाय 7 + 1 लिखने के 1 + 7 लिखना चाहिए।

जोड़ में दोनों दिशाओं में अभ्यास आवश्यक है; जैसे—

$$\begin{array}{c} 2+3+5 \text{ और } 2 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

घटाना (Subtraction)—घटाने में भी जोड़ने की भाँति आधारभूत सम्बन्ध पर अधिक ध्यान देना आवश्यक होता है।

घटाने में निम्न पदों को ध्यान में रखना चाहिए—

(1) प्रथम उदाहरण केवल दो अंकों (Digits) का होना चाहिए।

(2) धीरे-धीरे जटिल संख्याओं का प्रयोग किया जाना चाहिए जिनमें संख्या को उधार लेकर लौटाने (Borrowing) की विधि प्रयोग में आती है।

(3) उधार लेकर लौटाने (Borrowing) की विधि का पूर्ण अभ्यास होने पर घटाने की सरल विधि का ज्ञान कराना चाहिए, जैसे नीचे दिया गया है—

प्रश्न—523 में से 257 घटाओ।

(i) **विभाजन विधि**—

$$\begin{array}{rcl} 523 = 500+20+3 & = & 400+110+13 \\ 257 = 200+50+7 & = & \underline{200+50+7} \\ 523-257 & = & 200+60+6 \\ & = & 266 \end{array}$$

(ii) **बराबर संख्या जोड़ने की विधि**—

$$\begin{array}{rcl} 523 \text{ में } 110 \text{ जोड़ने पर} & = & 500+120+13 \\ 257 \text{ में } 110 \text{ जोड़ने पर} & = & \underline{300+60+7} \\ 523-257 & = & 200+60+6 \\ & = & 266 \end{array}$$

(iii) **सम्पूरक योग विधि (Complementary Method)**

$$\begin{array}{rcl} 523 & = & 500+20+3 \\ 257 & = & \underline{200+50+7} \\ \therefore \quad 523-257 & = & 200+60+6 \\ & = & 266 \end{array}$$

जोड़ने तथा घटाने के कुछ उदाहरण (Some Examples of Addition and Subtraction)

(अ) (i) 1, 2, 3, 4...... इससे आगे 1 बढ़ाकर लिखो।

(ii) 1, 3, 5, 7....... इससे आगे 2 बढ़ाकर गिनो।

(iii) 1, 4, 7, 10 या 2, 5, 8, 11 .... इससे आगे 3 बढ़ाकर गिनो।

(iv) इसी प्रकार 4, 5, 6....... आदि के अन्तर से संख्याओं को लिखो।

(ब) जैसे ऊपर दिया गया है, उसी प्रकार 50, 47, 44, 41 पीछे की ओर 3 के अन्तर में संख्याएँ गिनो।

(स) कापी या बोर्ड पर बड़ी-बड़ी तथा दूर-दूर कुछ संख्याएँ लिखो। जैसे—2, 7, 5, 3, 1, 4, 6, 9 आदि। प्रत्येक में 4 जोड़कर तथा 1 घटाकर अलग-अलग लिखो।

(द) निम्न संख्याओं को अलग-अलग 25 से घटाकर मान लिखो—
18, 19, 23, 15, 9, 13, 7 आदि।

(य) निम्नलिखित संख्याओं में से प्रत्येक को 30 से घटाकर मान लिखो।
16, 12, 10, 9, 18, 24, 22, 27, 28

गुणा करना (Multiplication)–गुणा करने में निम्न पदों का प्रयोग किया जाता है–

(1) प्रारम्भ में साधारण और सरल संख्याओं के गुणा पढ़ाने चाहिए। इस प्रकार के गुणा करने में केवल एक संख्या का प्रयोग किया जाना चाहिए।

(2) इसके पश्चात् हासिल (Carry Over) वाले गुणा करने चाहिए।

(3) इसके बाद दो संख्याओं वाले सरल गुणा; जैसे–$18 = 2 \times 9$, $28 = 7 \times 4$ का प्रयोग होना चाहिए।

(4) अन्त में जटिल रूप की संख्याओं से गुणा कराने चाहिए। बालकों को यह भी ज्ञात होना चाहिए कि गुणा सरल रूप में बदला जा सकता है; यदि गुणा करने वाली संख्या को दो भागों में बाँटा जाय। जैसे 23 से गुणा करने में उसके दो खण्ड $20 + 3$ हो सकते हैं। 20 और 3 से अलग-अलग गुणा करके जोड़ने से वही गुणनफल आता है जो कि 23 से गुणा करने पर आता है।

(5) विद्यार्थियों को स्वयं अपने पहाड़े के पैमाने (Multiplication Tables) तैयार करने चाहिए। इनके तैयार करने में छोटे-छोटे दानों, लकड़ी के टुकड़े आदि खेल की सामग्री का प्रयोग कर सकते हैं। इनके तैयार करने के अतिरिक्त इनको प्रयोग में भी लाना चाहिए। अभ्यास (Drill) द्वारा ये पैमाने याद कर लिये जाते हैं।

(6) बालकों को यह भली-भाँति समझ लेना चाहिए कि गुणा करने में दोनों संख्याओं का प्रयोग गुणक (Multiplier) के रूप में करने से परिणाम में कोई अन्तर नहीं आता है।

पहाड़े के पैमाने इस भाँति याद हों कि $6 \times 9 = 54$ कहने कि आवश्यकता न पड़े, बल्कि 9×6 को देखकर ही स्वयं 54 का ज्ञान हो जाय। नीचे कुछ मौखिक गुणा करने के उदाहरण दिये गये हैं–

(अ) नीचे दी हुई संख्याओं को 7 से गुणा करो–
5, 6, 9, 8, 7, 4

(ब) नीचे दी गयी संख्याओं में से किन्हीं दो को गुणा करके फल ज्ञात करो–
8, 12, 7, 9, 6, 5, 11, 13

(स) नीचे दी गयी संख्याओं को 4 से गुणा करके प्रत्येक के बायीं ओर की संख्या को पहले के गुणनफल में जोड़ो–
8, 15, 24, 31, 12, 17 आदि।

भाग देना तथा विभाजन (Division)–

(1) भाग देने में प्रारम्भ में एक संख्या का प्रयोग लाभप्रद होता है।

(2) इसके पश्चात् भाग देने में शेष (Remainder) का आना उचित होता है; जैसे–

$$\begin{array}{r} 11 \\ 4\overline{)45} \\ 44 \\ \hline 1 \end{array} \text{ (शेष)}$$

(3) इसके बाद इस प्रकार के प्रश्न हों जिनमें आगे को उठाकर (Carry) ले जाने का रूप हो। इसके साथ-ही-साथ बालकों को दो संख्याओं वाले भाग का पर्याप्त रूप से अभ्यास कराना चाहिए।

(4) इसके पश्चात् ऐसे प्रश्न हल करने चाहिए जिनमें 0 का प्रयोग हो।

भाग देने की क्रिया के दो प्रकार के अर्थ हैं। एक तो $\frac{6}{2}$ रु० = 3 रु० इसमें 6 रुपये में तीन-तीन रू० के 2 समूह हुए। यह बराबर-बराबर के भागों में विभाजित करता है। दूसरा रूप $\frac{6}{2}$ रु० = 3 रु० है। यह अनुपात का रूप है। इसके अनुसार 6 रु० में 2 रु० वाले 3 समूह हुए।

भाग देने के प्रश्नों में उत्तर बड़े भाग में ऊपर तथा छोटे भाग में भाज्य के नीचे स्थानीय मान का विचार करके लिखने का आग्रह करना चाहिए। कभी दायें लिखने की आज्ञा नहीं देनी चाहिए। भाग के प्रश्न को भी गुणा की भाँति विभाजित करके इसकी सरल विधि उपलब्ध करायी जा सकती है। भाग देना इसलिए कठिन है कि इसमें सम्भावनाओं (Possibilities) का क्षेत्र काफी विस्तृत होता है, किन्तु अभ्यास से यह सीमित (Limited) हो जाता है।

भिन्नें (Fractions)–यदि भिन्न का ज्ञान अंकगणित में ही सही रूप से हो जाता है तो बीजगणित (Algebra) में भिन्न का ज्ञान सरल हो जाता है। इसलिए शिक्षक को अंकगणित पढ़ाते समय भिन्नों पर मुख्य रूप से ध्यान देना आवश्यक है।

बालक को छोटी ही आयु में 1/2 भिन्न का ज्ञान हो जाने पर ही शीघ्र 1/3, 1/4, 2/3 आदि का ज्ञान हो जाता है। किसी भी पाठ के प्रारम्भ करने से पहले उपर्युक्त भिन्नों का ज्ञान आवश्यक है। उपर्युक्त भिन्नों का ज्ञान एक वस्तु के द्वारा किया जा सकता है। जैसे 3/5 का ज्ञान देना है तो वस्तु के 5 बराबर हिस्से करके उसमें 3 हिस्से लेकर उपर्युक्त भिन्न 3/5 का सही ज्ञान दिया जा सकता है। भिन्न पढ़ाने में बालकों को यह ज्ञान देना आवश्यक है कि किसी भी भिन्न का मान सदैव वही रहता है; यदि उसके अंश (Numerator) और हर (Denominator) को किसी एक ही संख्या से भाग या गुणा किया जाय। उदाहरण के लिए, 3/5 एक भिन्न है तो 2 से अंश और हर को गुणा करने से $\frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ही आता है। इसी प्रकार 2 से भाग देने से भी $\frac{3 \div 2}{5 \div 2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ ही आता है।

भिन्न समझने में कठिनाइयाँ (Difficulties in Grasping Fraction)

(1) बालक भिन्न में संख्या के स्थान पर ध्यान नहीं देते जिससे वे $\frac{1}{7}$ को $\frac{1}{5}$ से बड़ा समझते हैं, क्योंकि पहले में दूसरे से बड़ी संख्या का प्रयोग हुआ है।

(2) भिन्न से किसी संख्या को गुणा करने से मान कम आता है, जबकि बालक गुणा का अर्थ मान में अधिकता होने का ध्यान रखते हैं।

(3) बालक अपने मस्तिष्क में वास्तविक (Original) इकाई का ध्यान नहीं रख पाते हैं; जैसे–एक वस्तु के तीसरे भाग के चार और छोटे भाग किये जायें तो उसका मान बालक चौथाई में ही समझते हैं, जबकि उसका भाग 12वें रूप में होना चाहिए।

भिन्न का सही ज्ञान साधारण वस्तुओं के द्वारा सही रूप में दिया जा सकता है। इसके लिए रुपये, पैसे, दिन, घण्टे, मिनट, पटरी आदि की सहायता ली जा सकती है।

जोड़ (Addition)—$\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ जोड़ से प्रारम्भ किया जाय। इसके लिए एक गोल रोटी (Cake) या सेब लेकर उसको दो बराबर भाग तथा तीन बराबर भागों में बाँटकर $\frac{1}{2}$ भाग और $\frac{1}{3}$ भाग को लेकर मिला लो। उनको मिलाकर स्वयं ही $\frac{2}{3}$ आ जायेगा।

अब दूसरे उदाहरण को ध्यान से देखा जाय—

1111 मे प्रत्येक 1 अपनी बायीं ओर को अपने 10 गुने के बराबर तथा $\frac{1}{10}$ गुने के बराबर अपने दायीं ओर होता है। यदि उपर्युक्त में 1 को स्तम्भ (Column) के दायीं ओर रखा जाय तो नवीन 3 का मान $\frac{1}{100}$ वाँ होगा। इस तरह से—

हजार (Thousands)	सैकड़ा (Hundreds)	दहाई (Tens)	इकाई (Units)	$\frac{1}{10}$ वाँ
1	1	1	1	1

स्थानीय मान का ज्ञान हो जाने के बाद दशमलव का जोड़ और घटाना आसानी से हल किया जा सकता है। इसके बाद पूर्ण संख्याओं का गुणा और भाग किया जा सकता है। दशमलव भिन्न को साधारण भिन्न में बदला जाता है। इसके पश्चात् साधारण भिन्न (Fraction) की तरह उनका जोड़, घटाना, गुणा तथा भाग किया जा सकता है।

क्षेत्रफल तथा आयतन (Area and Volume)

क्षेत्रफल (Area)—कक्षा में बालकों को क्षेत्रफल का विचार (Concept) प्रारम्भ से ही गलत दिया जाता है, जिसके कारण वे उसकी परिभाषा को रटकर प्रश्न हल करते हैं। परन्तु उनको क्षेत्रफल का सही ज्ञान नहीं हो पाता है। इसके लिए प्रारम्भ में परिभाषा नहीं दी जानी चाहिए।

क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए निश्चित इकाई को मानकर चलना चाहिए। माना कि एक श्यामपट्ट (Black-board) का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो हम एक आधार इकाई वर्ग फुट (Square foot) कार्ड-बोर्ड के टुकड़े से आरम्भ करते हैं। कार्ड-बोर्ड की सहायता से यह ज्ञात किया जाता है कि वह कितनी बार (Times) श्यामपट्ट पर आता है। माना यह वर्ग फुट 15 बार बोर्ड पर आता है तो उस बोर्ड का क्षेत्रफल 15 वर्ग फुट होगा। इसकी लम्बाई 5 फुट तथा चौड़ाई 3 फुट है और इसमें 1 वर्ग फुट के 15 भाग बनते हैं तो 5 को 3 से गुणा करने पर 15 वर्ग फुट आते हैं, क्योंकि 5 फुट के क्षेत्र इसमें 3 बार आते हैं।

इस तरह के भिन्न-भिन्न उदाहरणों द्वारा एक सामन्य नियम पर पहुँचा जा सकता है। किसी आयत (Rectangle) के क्षेत्रफल वर्ग फुट की संख्या ज्ञात करने के लिए लम्बाई के फुट को चौड़ाई के फुट से गुणा करते हैं। इस तरह से परिणाम वर्ग फुट में आता है। इसमें वास्तव में संख्याओं का गुणा होता है, न कि लम्बाई और चौड़ाई का।

इसके बाद भिन्न तथा दशमलव का प्रयोग किया जा सकता है। इसमें केवल ध्यान देने की बात यह है कि छोटी इकाई का प्रयोग किया जाय। भिन्न-भिन्न आकार के चित्रों का क्षेत्रफल निकालने की विधि रेखागणित के अध्याय में दी गयी है।

आयतन (Volume)—किसी ठोस वस्तु का आयतन निकालने के लिए सबसे आवश्यक बात यह है कि हमको आयतन का सही विचार हो। क्षेत्रफल (Area) की भाँति इसके निकालने में भी निम्न पदों (Steps) से होकर गुजरना पड़ता है—

(अ) एक आयतन की इकाई मान लेनी चाहिए।

(ब) इस इकाई के कितने भाग किसी आयतन (Volume) में सम्मिलित हैं। इस तरह से कक्षा में आयतन का ज्ञान दिया जाता है, जैसे—

क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई (Length × Breadth)

आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × मोटाई (Length × Breadth × Thickness)

उपर्युक्त विचार वास्तव में एक सही रूप नहीं है।

इसके लिए एक आयताकार ठोस (Rectangular Solid) लिया जाता है। माना इसकी—

लम्बाई = 9 इंच

चौड़ाई = 4 इंच

मोटाई = 3 इंच

इसको आधार से ऊपर की ओर छोटे-छोटे वर्ग इंचों में बाँट कर और 1 इंच मोटे भागों पर चिन्ह लगा दो।

नीचे के प्रत्येक वर्ग इंच पर 1 इंच भाग खड़ा रहता है। इस तरह से नीचे की सतर पर उतने ही वर्ग इंच होते हैं, जितने कि आधार (Base) वर्ग का क्षेत्रफल (Area) होता है। यह बात सभी भागों के लिए समान होती है। इस उदाहरण से एक नियम ज्ञात किया जाता है—

किसी समान मोटाई (Cross Section) में ठोस में घन इंच निकालने के लिए मोटाई के वर्ग इंचों (Square Inches) की लम्बाई के इंचों से गुणा करके ज्ञात किया जाता है।

इस तरह से प्रारम्भ में वस्तु के द्वारा आयतन ज्ञात करने के पश्चात् वस्तु के अभाव में भी उसके आयतन का विचार (Concept) हो जाता है।

अनुपात (Ratio)—अनुपात का तात्पर्य यह है कि कोई संख्या दूसरी संख्या की कितनी गुनी है। जैसे कि 5 किलोग्राम, एक किलोग्राम का 5 गुना है तो 1 किलोग्राम से उसका अनुपात 5 का है, क्योंकि पहली संख्या दूसरी से 5 गुनी है।

यद्यपि बालक अनुपात-सम्बन्धी प्रश्न हल कर सकते हैं, परन्तु उनको अनुपात का सही ज्ञान नहीं होता है। इसका ज्ञान मीटर पैमाने से दिया जा सकता है। यहाँ हम दो लम्बाई से मतलब रखते हैं—एक तो 3 मीटर और दूसरी 1 मीटर। दोनों की तुलना दो रूपों में की जा सकती है—

(1) 3 मीटर की लम्बाई, 1 मीटर से 2 मीटर अधिक है।

(2) 3 मीटर की लम्बाई, 1 मीटर का 3 गुना है।

उपर्युक्त ज्ञान शिक्षक छोटी-छोटी गेंदों की सहायता से भी दे सकता है। एक ओर 2 गेंद तथा दूसरी ओर 10 गेंद रखकर उनमें आपस के सम्बन्ध को ज्ञात किया जा सकता है। इस तरह से एक ही प्रकार की भिन्न-भिन्न वस्तुओं की संख्याओं में अनुपात किया जा सकता है। इस तरह अनुपात 1 : 4, 3 : 5, 4 : 10, 3 : 15 आदि का हो सकता है।

इसके पश्चात् बालकों को अनुपात लिखने का ज्ञान देना चाहिए। अनुपात के लिए ÷, / और : जैसे 3 ÷ 2, 4/5 और 3 : 5 चिन्हों का प्रयोग किया जाता है। अनुपात में दोनों भागों को एक ही संख्या से गुणा करने पर उनके अनुपात एक ही है।

समानुपात (Proportion)–अनुपात का ज्ञान हो जाने पर समानुपात (Proportion) का ज्ञान देना चाहिए। इसके पढ़ाने से पहले बालकों को भिन्न का गुणा तथा भाग का स्पष्ट ज्ञान होना आवश्यक है।

प्रथम पाठ में बालकों को वह प्रश्न हल कराने चाहिए जिनमें समानुपात न हो, फिर जिनमें कुछ समानुपात हो तथा अन्त में वे प्रश्न देने चाहिए जिनमें समानुपात पूर्णरूप से हो।

किन्हीं चार संख्याओं में ऐसा अनुपात हो कि 1 और 2 का सम्बन्ध = 3 और 4 के सम्बन्ध से हो। इस तरह के क्रम को समानुपात (Proportion) कहते हैं; जैसे 2 : 4 = 8 : 16। इसको $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$ या 2 : 4 : : 8 : 16 के रूप में लिखा जा सकता है। समानुपात या तो सरल (Direct) या प्रतिलोम (Inverse) दो प्रकार का हो सकता है।

सरल समानुपात (Direct Proportion)–इसका प्रयोग उन संख्याओं में किया जाता है, जहाँ संख्याओं में समान रूप से घटना तथा बढ़ना होता है। इसका योग निम्नांकित प्रकार से करते हैं–

(1) कीमत तथा संख्या में (Cost and Numbers)
(2) दूरी और किराया (Distance and Fare)
(3) समय और दूरी (Time and Distance)
(4) मजदूरी तथा कार्य (Wages and Work)।

प्रतिलोमानुपात (Inverse Proportion)–इस प्रकार के समानुपात में एक राशि के बढ़ाने पर दूसरी राशि घट जाती है। उदाहरण के लिए, एक आयत (Rectangle) की भुजाओं के अनुपात से यह बात स्पष्ट हो जाती है–

एक भुजा	दूसरी भुजा
4 मी	4 मी
8 मी	2 मी
16 मी	1 मी
32 मी	$\frac{1}{2}$ मी

उपर्युक्त ज्ञान रेखाचित्र (Graph) के द्वारा भी स्पष्ट हो जाता है। एक बार समानुपात का ज्ञान हो जाने पर कठिन प्रश्नों का प्रयोग किया जा सकता है।

प्रतिशत (Percentage)–प्रतिशत भिन्न का वह रूप है जिसमें 'हर' (Denominator) 100 होता है। इसका ज्ञान देने के लिए शिक्षक को साधारण उदाहरणों का प्रयोग करना चाहिए। कक्षा में प्राप्त अंकों को प्रतिशत में क्यों ज्ञात किया जाता है ? इससे तुलना (Comparison) करने में आसानी होती है। 30 में से 15 अंक प्राप्त करने से कुछ स्पष्ट नहीं होता, परन्तु यदि यह कहा जाय कि अमुक बालक को 50% अंक मिले तो यह स्पष्ट हो जाता है कि बालक की क्या योग्यता है। इस तरह

से प्रत्येक मोल-तोल में प्रतिशत का प्रयोग किया जाता है। इसके द्वारा तुलना करने में आसानी होती है।

प्रतिशत का प्रयोग ब्याज (Interest), लाभ और हानि (Profit & Loss) तथा बट्टा (Discount) आदि में होता है। प्रतिशत का अध्ययन भिन्नों की तुलना से प्रारम्भ होना चाहिए। जब इन भिन्नों को 100 के अनुपात में रखा जाता है तो उसे प्रतिशत कहते हैं ।

प्रतिशत में वह मुख्य बात जिस पर जोर दिया जाना चाहिए क% है, जिसका तात्पर्य वस्तु के क/100 से है। इसके ज्ञान के लिए बहुत-से सरल उदाहरण दिये जाने चाहिए। कुछ उदाहरण नीचे दिये गये हैं–

उदाहरण 1. $\frac{3}{8}$ भिन्न को प्रतिशत के रूप में लिखो।

हल–माना $\frac{3}{8} = \frac{\text{क}}{100}$

$\therefore$ $\text{क} = 37\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\frac{3}{8} = 37\frac{1}{2}\%$

उदाहरण 2. एक विद्यालय में 18% बालक चश्मा प्रयोग करते हैं। यदि विद्यालय में कुल 250 लड़के हों तो कुल कितने बालक चश्मा प्रयोग करते हैं ?

हल– विद्यालय में 18% $= \frac{18}{100} \times 250$

= 45 लड़के।

ब्याज, स्कन्ध तथा अंश
(INTEREST, STOCK AND SHARES)

ब्याज (Interest)

ब्याज का ज्ञान देने से पहले प्रतिशत का ज्ञान होना आवश्यक होता है। कभी-कभी बालक 4% (4 per cent) सूत्र को सही रूप से नहीं समझते हैं। पहले मौखिक (Oral) तथा बाद में लिखित उदाहरण का प्रयोग होना चाहिए। यदि बालक 4% को समझता है कि वह किसी वस्तु के $\frac{4}{100}$ से मतलब रखता है तो वह ब्याज के प्रश्न आसानी से हल कर सकेगा।

बालक को यह ज्ञान होना चाहिए कि ब्याज क्यों पड़ता है ? यह किस धन पर पड़ता है ? जैसे पोस्ट आफिस में 100 रु० जमा करा दें तो किसी निश्चित समय के बाद हमें 100 रु० के अतिरिक्त कुछ और धन मिलता है। इसी अतिरिक्त धन को ब्याज (Interest) कहते हैं।

उदाहरण 1. 250 रु० पर 5 वर्ष का 4% के हिसाब से क्या ब्याज होगा ?

हल– $\because$ 250 रु० पर 4% प्रति वर्ष के हिसाब से 1 वर्ष का ब्याज

$= \frac{4}{100}$ का 250

$\because$ 250 रु० पर 4% प्रति वर्ष के हिसाब से 5 वर्ष का ब्याज

$= \frac{4}{100} \times 5 \times 250 = 50$ रु०।

उदाहरण 2. यदि 125 रु० पर 5% प्रति वर्ष के हिसाब से ब्याज 25 रु० है तो यह ब्याज कितने समय में होगा ?

हल– 125 रु० पर 1 वर्ष का 5% के हिसाब से ब्याज $= \frac{5}{100}$ का 125

125 रु० पर 'क' वर्ष का 5% के हिसाब से ब्याज $= \frac{5}{100} \times 125 \times$ क

ब्याज = 25 रु०

परन्तु $\frac{5}{100} \times 125$ क $= 25$

$\therefore$ क $= \frac{25}{125} \times \frac{100}{5} = 4$ वर्ष

स्कन्ध तथा अंश (Stock and Shares)

इसका प्रयोग आरम्भ में नहीं करना चाहिए। इसका प्रयोग करीब 15 वर्ष की आयु से किया जाता है। भिन्न-भिन्न प्रकार के धन को यदि बालक समझते हैं कि वह ब्याज है या स्कन्ध, तो स्कन्ध (Stock) समझने में उनको किसी तरह की कठिनाई नहीं होगी।

ब्याज की भाँति इसमें भी प्रारम्भ में मौखिक प्रश्न तथा बाद में लिखित प्रश्न कराने चाहिए। इनकी प्रस्तावना (Introduction) अवश्य उपयुक्त होनी चाहिए। इनका ज्ञान समाचार-पत्र में किसी नयी खुली कम्पनी की विज्ञप्ति द्वारा होना चाहिए। स्कन्धों (Stocks) के प्रश्नों में आय की दर साथ लगी रहती है।

वर्गमूल
(SQUARE ROOT)

वर्गमूल ज्ञात करने में दायीं ओर से बायीं ओर को चलना चाहिए। इसके साथ ही-साथ दो-दो जोड़े बना लेने चाहिए; जैसे 17361820 का वर्गमूल निकालना है तो इसके चार जोड़े 17, 36, 18, 20 बन जाते हैं। इसके बाद प्रथम जोड़े का वर्गमूल निकाल लो; जैसे कि $\overline{17, 36, 18, 20}$ के प्रथम जोड़े में 17 का वर्गमूल 4 हुआ। फिर दोनों ओर 4, 4 रख लो; जैसे–$4\overset{4}{\overline{)17, 36, 18, 20}}$ फिर ऊपर वाले का दोगुना करके बायीं ओर लिखकर पहले जोड़े का शेष तथा दूसरे जोड़े को उतार कर उसमें 4 के दोगुने भाग यानी 8 का भाग दे दो। इस तरह किसी भी संख्या का वर्गमूल निकाला जा सकता है।

उदाहरण–69906321 का वर्गमूल ज्ञात करो।

हल–

$$\begin{array}{r|l} & 83 \\ \hline 8 & 69,\ 90,\ 63,\ 21 \\ & 64 \\ \hline 163 & 590 \\ & 489 \\ \hline 166 & 10163 \text{ आदि.....} \end{array}$$

अंकगणित के किसी भी प्रकार के प्रश्न को हल करने में विश्लेषण (Analysis) विधि का प्रयोग सबसे उत्तम होता है। इसके उदाहरण पाठ-सूत्र (Lesson Plan) दिये गये हैं।

उदाहरण के रूप में एक उप-विषय (Topic)

अनुपात तथा समानुपात (Ratio and Proportion) को लेकर उसका उदाहरण निम्न पदों में दिया गया है जिससे उस उप-विषय को पढ़ाने में शिक्षक को सहायता मिल सके। इसी प्रकार अन्य उप-विषयों को भी इन पदों (steps) में सही रूप में पढ़ाया जा सके। ये पद निम्न है–

(1) उद्देश्य (Objectives) तथा स्पष्टीकरण (Specification)
(2) पाठ्य-वस्तु का विश्लेषण (Content Analysis)
(3) पाठ्य-वस्तु का संगठन (Content Organization)
(4) शिक्षण के कुछ आवश्यक बिन्दु (Teaching Hints)
(5) सीखने की क्रियायें (Learning activities)
(6) छात्र को प्रश्न देना (Assignments)
(7) मूल्यांकन (Evaluation)

उपर्युक्त पदों की संक्षिप्त व्याख्या नीचे की गई है

उद्देश्य (Objectives)

1. अनुपात तथा समानुपात उप-विषय सम्बन्धी पद, प्रत्यय, सिद्धान्त आदि का ज्ञान प्राप्त करना।

(To acquire the knowledge of terms, concepts, principles etc. regarding the topic ratio and proportion.

स्पष्टीकरण (Specification)

(अ) छात्र पद, प्रत्यय, चिन्ह, सिद्धान्त आदि को पहचान सकता है।
(The pupil recognizes terms, concepts, symbols, principles etc.)

(ब) वह पद, प्रत्यय, सिद्धान्त आदि का प्रत्यास्मरण कर सकता है।
(He recall terms, concepts, principles etc.)

(स) वह भिन्न-भिन्न पद, प्रत्यय, सिद्धान्त आदि के उदाहरण दे सकता है।
(He illustrates various terms, concepts. principles etc.)

(द) वह दो या अधिक वह सम्बन्धित प्रत्ययों में अन्तर कर सकता है।
(He discriminates between closely related concepts)

2. उप-विषय सम्बन्धी समस्याओं को हल करने हेतु चातुर्य विकसित करना।
(To develop skill in solving problems related to the topic)

स्पष्टीकरण (Specification)

(अ) छात्र अनुपात से सम्बन्धित मान की तुलना कर सकता है।
(The pupil compares the relative size of a ratio)

(ब) वह अनुपात के करीबी मूल्य को ज्ञात कर सकता है।
(He finds the approximate value of ratio)

(स) वह एक रेखा तथा क्षेत्रफल को दिये हुए अनुपात में बाँट सकता है।
(He divides a line and an area in a given ratio)

(द) वह सामान्य गति तथा शुद्धता से अनुपात तथा समानुपात सम्बन्धी समस्याओं को हल कर सकता है।

(He solves the problems involving Ratio and Proportion with reasonable speed & accuracy)

(य) वह अपने परिणामों की शुद्धता को वास्तविक संख्याओं द्वारा प्रमाणित कर सकता है।

(He checks the correctness of his results by actual verifications)

3. इस उप-विषय के अध्ययन द्वारा प्राप्त ज्ञान तथा कौशल को दैनिक जीवन में आने वाली समस्याओं को हल करने हेतु प्रयोग करना।

(To apply the knowledge and skills attained through the study of the topic in solving problems from everyday life)

(अ) छात्र समस्या का विश्लेषण कर ज्ञात करता है कि समस्या क्या है और क्या ज्ञात करना है।

(The students analyses the problem and finds what is given and what is to be found out)

(ब) वह किसी समस्या को हल करने में प्रयोग होने वाले पदों को दृष्टिगोचर कर सकता है।

(He visualises the various steps in solving a particular problem)

(स) वह इस उप-विषय के अध्ययन से प्राप्त ज्ञान को नवीन उप-विषयों जैसे प्रतिशत आदि को हल करने में प्रयोग कर सकता है।

(He makes use of the knowledge attained through the study of the topics like percentage etc.)

(द) वह अनुपात की सहायता से भिन्न-भिन्न वस्तुओं के मूल्यों की तुलना कर सकता है।

(He compares the values of different articles with the helps of ratio)

(य) वह अनुपात तथा समानुपात का प्रयोग प्राकृतिक विज्ञान में आने वाली समस्याओं में कर सकता है।

(Uses ratio and proportion in problems from various natural sciences)

Content Analysis

बोध (Understanding)

1. अनुपात किसी मान या संख्या का दूसरी संख्या से सम्बन्ध होता है, इससे यह ज्ञात होता है कि एक संख्या या मान दूसरी संख्या या मान से कितना गुना है।

2. जिन संख्याओं की तुलना की जाती है उनकी इकाई समान हो।

3. दो संख्याओं a तथा b की मात्रा का अनुपात निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जाता है :

$$a : b \,,\, a \div b \text{ or } \frac{a}{b}$$

4. a और b को अनुपात का प्रथम तथा द्वितीय पद कहा जाता है $a : b$

5. अनुपात तीन प्रकार के होते हैं–

(अ) बराबर (equality) का $a : a$

(ब) यदि a और b में अधिक असमानता है तो $a > b$ लिखा जाता है।

(स) यदि a और b में कम असमानता है तो $a < b$ लिखा जाता है।

6. यदि अनुपात के दोनों पदों को एक ही संख्या से गुणा या भाग किया जाय तो अनुपात में कोई परिवर्तन नहीं होता है। जैसे–

(अ) $5 : 7 = \frac{5}{2} : \frac{7}{2} = 10 : 14$

(ब) $a : b = ac : bc \ (c \neq 0)$

7. यदि अनुपात की दोनों बराबर की राशियों में एक ही संख्या जोड़ी या घटायी जाय तो उनके अनुपात की राशि भी बराबर रहेगी–

(अ) $4 : 4 = (4 + 1) : (4 + 1) = 5 : 5$

(ब) $4 : 4 = (4 - 1) : (4 - 1) = 3 : 3$

कौशल (Skill)

छात्रों को सहायता प्रदान की जाती है कि वे–

(i) गणित के क्षेत्र में अनुपात तथा समानुपात के प्रश्नों को हल करने हेतु कौशल का विकास।

(ii) योग्यता विकसित करने में सफल हों जिसके आधार पर वे किसी समस्या में अनुपात तथा समानुपात का प्रयोग कर सकें।

प्रसंग (Appreciation)

छात्र ज्ञान की भिन्न-भिन्न शाखाओं में अनुपात तथा समानुपात के महत्त्व को समझ सकें तथा दैनिक जीवन में प्रयोग होने वाले ज्ञान से आनन्द उठा सकें।

पाठ्य-वस्तु का संगठन
(CONTENT ORGANIZATION)

अनुपात दो राशियों में सम्बन्ध बताता है, राशियाँ एक ही प्रकार (Kind) तथा एक ही इकाई की होनी चाहिए।

(1) अनुपात दो राशियों का सम्बन्ध है जो कि संख्या द्वारा लिखा जाता है। जैसे 25 फीट का 15 फीट से सम्बन्ध लिखा जाता है–

$$\frac{25 \text{ फीट}}{15 \text{ फीट}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1{\cdot}666$$

दूसरी विधि द्वारा–

$$\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

तीसरी विधि द्वारा–दो राशियों 'a' और 'b' के अनुपात $a : b$ के रूप में लिखते हैं।

(2) अनुपात में कौन-सी संख्या दूसरी से छोटी या बड़ी है। जैसे अग्र में से कौन-सी भिन्न बड़ी है–

$$\frac{1}{3} \text{ या } \frac{1}{4}$$

इनमें दोनों के हर को समान करने पर पहली भिन्न $\frac{4}{12}$ तथा दूसरी $\frac{3}{12}$ हो जायेगी। अब इनकी तुलना करना आसान हो जायेगा। जैसे–

$$\frac{4}{12} > \frac{3}{12} \text{ या } \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

(3) प्रतिशत सम्बन्धी समस्याओं को हल करने में समानुपात का प्रयोग–

समस्या (Problem)–एक दुकानदार अपनी प्रत्येक वस्तु पर 30% छूट देता है, एक वस्तु का विक्रय मूल्य क्या होगा जिसका क्रय मूल्य (cost price) 2·96 रु० है।

हल (Solution)–

विक्रय मूल्य x, 2·96 का 70% होगा

$$\frac{x}{2{\cdot}96} = \frac{70}{100}$$

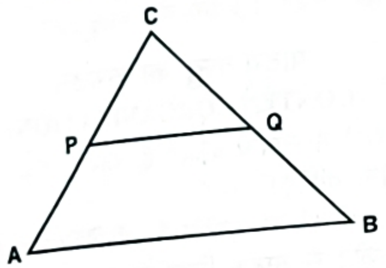
$\therefore$

या $$x = \frac{2{\cdot}96 \times 70}{100} = 2{\cdot}07$$

इसलिए वस्तु का विक्रय मूल्य = 2·07 रु०।

(4) रेखागणित में समानुपात का प्रयोग–

यदि एक त्रिभुज ABC की आधार रेखा AB के समानान्तर PQ रेखा खींची जाय तो निम्न समानुपात $\frac{CP}{PA} = \frac{CQ}{QB}$ सत्य होगा।



उदाहरण–उपरोक्त चित्र में CP = 5″, PA = 1″ तथा CB = 12″, CQ तथा QB की लम्बाई ज्ञात करो ?

माना $CQ = x$

$QB = 12 - x$

$\because \quad \frac{CP}{PA} = \frac{CQ}{QB}$ तो $\frac{5}{1} = \frac{x}{(12-x)}$

$\therefore \quad x = 10$

$12 - x = 2$

शिक्षण के कुछ आवश्यक बिन्दु
(TEACHING HINTS)

छात्रों में अनुपात तथा समानुपात उप-विषय का सही ज्ञान हेतु निम्नलिखित बिन्दुओं को ध्यान में रखना चाहिए–

1. शिक्षक को अनुपात समझाने हेतु छात्रों को कुछ सामान्य वस्तुएँ तथा चिन्ह बनाने हेतु वस्तुएँ देनी चाहिए। उसके पश्चात् सामान्य समस्या देकर वस्तुओं को कम तथा अधिक संख्याओं में रखने के बाद अनुपात के रूप में लिखने को कहा जाय।
2. चित्रों की सहायता से भी दो चित्रों के अनुपात को देख कर ज्ञात किया जा सकता है।
3. छात्र स्वयं चित्र खींच कर दो संख्याओं के अनुपात को ज्ञात कर सकते हैं।
4. छात्र स्वयं वस्तुओं द्वारा या चित्रों द्वारा अनुपात को समझ सकते हैं।
5. एक ही अनुपात को भिन्न-भिन्न नामों से भी प्रदर्शित किया जा सकता है–अनुपात को संख्या के रूप में या दर के रूप में भी लिखा जा सकता है।

उदाहरण के रूप में–एक कक्षा में 30 विद्यार्थी हैं जिनमें 12 छात्राएँ हैं–निम्न प्रश्न पूछें–

(i) छात्राओं की संख्या पूरी कक्षा के विद्यार्थियों से किस अनुपात में है ?
(ii) छात्रों का पूरी कक्षा से क्या अनुपात है ?
(iii) छात्र और छात्राओं में आपस में क्या अनुपात है ?

सीखने की क्रियायें (Learning Activities)

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ यदि $ad = bc$ छात्रों को उपर्युक्त के आधार पर निम्न अनुपातों में कौन-कौन बराबर हैं उनको ज्ञात करें–

(a) $\frac{10}{5}, \frac{20}{10}$ (b) $\frac{6}{3}, \frac{16}{9}$

2. छात्र निम्न में x का मान ज्ञात करें–

$$\frac{20}{8} = \frac{x}{6}$$

जिससे उसका सत्यापन ज्ञात करें।

3. छात्र निम्न समस्याओं को हल करने में समानुपात का प्रयोग करें–
3 दर्जन केलों का 55 पैसे प्रति दर्जन के हिसाब से कितना मूल्य होगा ?
छात्रों को दूसरी विधि द्वारा उपरोक्त हल का सत्यापन ज्ञात करने को कहें।

4. निम्न में से कौन-सा अनुपात दूसरे से बड़ा है–

$$\frac{2}{3} \text{ या } \frac{3}{4}$$

5. त्रिभुज ABC में BD रेखा B कोण को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, तो बताइये कि AD और DC में क्या अनुपात है यदि AB = 10" और BC = 8" हो।

छात्र को प्रश्न देना (Assignment)

1. निम्न अनुपातों को बड़े से छोटे क्रम में रखें–
3 : 4, 7 : 12, 8 : 9, 2 : 3, 5 : 8

2. निम्न के लगभग मूल्य ज्ञात करें—$(127)^2 : (124)^2$

3. दो संख्याओं का अनुपात $2:3$ है, यदि इनमें अलग-अलग 7 की संख्या जोड़ी जाय और अनुपात $3:4$ का हो जाता है तो उन संख्याओं को ज्ञात करो।

4. इसी प्रकार यदि अनुपात $4:5$ हो और दोनों में अलग-अलग 6 जोड़ा जाय तो अनुपात $3:4$ का हो जाय तो दोनों संख्यायें ज्ञात करो।

5. निम्न में x का मान ज्ञात करो—

(i) $3:7::x:42$

(ii) $x+4:2x+8::2x-1:3x+2$

6. यदि $12a+b:12c+d=15a+b:15c+d$

सिद्ध करो कि $a:b=c:d$

मूल्यांकन (Evaluation)—नीचे मूल्यांकन हेतु कुछ समस्यायें दी गई हैं। शिक्षक इनके अतिरिक्त अन्य समस्यायें जो उप-विषय से सम्बन्धित हों, दे सकता है—

1. नीचे एक सूची दी गई है जिसमें A तथा B का भिन्न-भिन्न मान दिया गया है। प्रत्येक जोड़े में A और B का अनुपात 6/7 दिया गया है। पूरी सूची (Table) को पूरा करें।

	A	B	अनुपात $\frac{A}{B}$	साधारण रूप में अनुपात
(a)	12	14	$\frac{12}{14}$	$\frac{6}{7}$
(b)		21		
(c)	30			
(d)		100		
(e)	100			

2. यदि $\frac{x}{7}=\frac{3}{4}$ तो गलत मान निम्न में से किसमें है ?

(a) $\frac{x+y}{y}=\frac{7}{4}$ (b) $\frac{y}{y-x}=\frac{4}{1}$

(c) $\frac{x+2y}{x}=\frac{11}{3}$ (d) $\frac{x}{2y}=\frac{3}{8}$

(e) $\frac{x-y}{y}=\frac{1}{4}$

इसी प्रकार किसी भी उप-विषय (Topic) को 7 खण्डों में विभाजित कर प्रभावशाली शिक्षण सम्भव हो सकता है। उदाहरण के रूप में अनुपात तथा समानुपात (Ratio and Proportion) का उप-विषय दिया गया है।

■■

19

बीजगणित की पाठन-विधि

[TEACHING METHOD OF ALGEBRA]

बीजगणित क्या है ? (What is Algebra ?)

'बीजगणित' (Algebra) शब्द एक अरबी शब्द से निकला है। इस शब्द का तात्पर्य यह है कि किसी समीकरण (Equation) के एक ओर से कोई संख्या दूसरी ओर ले जाने में उसका चिन्ह बदल जाता है।

अंकगणित की तरह बीजगणित भी संख्याओं का विज्ञान है। अन्तर केवल यह है कि बीजगणित में अंकों (Numbers) के स्थान पर अक्षरों (Letters) का प्रयोग होता है। इन दोनों के बीच कोई विशेष भेद नहीं है। बीजगणित को अंकगणित का सामान्यानुमान रूप (Generalized Aspect) कहा जाता है।

बीजगणित क्यों पढ़ाया जाता है ? (Why do we Teach Algebra ?)

बीजगणित इसलिए पढ़ाया जाता है, क्योंकि

(1) यह गणित की अन्य शाखाओं में प्रयोग होता है।

(2) इसमें बहुत-से लाभदायक विचार होते हैं, जिनका शिक्षा में बड़ा महत्त्व है।

(3) इसके द्वारा कार्य करने की क्षमता पैदा होती है।

बीजगणित से निम्न विचार पैदा होते हैं

(1) समीकरणों (Equations) के द्वारा बहुत-सी समस्याओं का हल ज्ञात होता है।

(2) सामान्यानुमान (Generalization) की शक्ति का विकास तथा सूत्रों (Formulae) के प्रयोग की क्षमता इसके द्वारा पैदा होती है।

(3) प्रयोगात्मक विचार क्या है, इसका भी ज्ञान होता है।

समस्याओं का हल (Solution of Problems)—समीकरणों का बीजगणित में प्रयोग अंकगणित की विधियों की एक नवीन रूपरेखा है। बालक में इसके द्वारा एक नवीनता आती है, जिससे वह इसमें रुचि रखता है।

सामान्यानुमान तथा सूत्र (Generalization and Formulae)

बीजगणित में अंकगणित के बड़े पैमानों को छोटे रूप में लिखा जा सकता है। भिन्न-भिन्न उदाहरणों के द्वारा किसी तथ्य पर पहुँचा जाता है; जैसे—$2\times 7=7\times 2$। इसको एक सूत्र में रखा जा सकता है; जैसे—अ ब = ब अ।

गणित को जीवन में प्रयोग करने में सूत्रों का विशेष स्थान होता है। इसमें विस्तृत सूचना होती है तथा इसमें विचार गुथा रहता है।

प्रयोगात्मक विचार—बीजगणित में किसी कार्य को समीकरण रूप में तथा रेखाचित्र में रखा जा सकता है। इसके द्वारा वस्तु के बारे में समझना सरल हो जाता है। रेखाचित्र के द्वारा सारे कार्य को स्थूल (Concrete) बनाया जा सकता है। इसके विपरीत, अंकगणित में वस्तु का ज्ञान स्पष्ट नहीं हो पाता है। बीजगणित में किसी समस्या को कोई रूप दिया जाता है।

बीजगणित के कार्य (Functions of Algebra)

(1) इसके द्वारा अंकगणित की विधियों का स्पष्टीकरण किया जाता है।

(2) इसके द्वारा विद्यार्थियों की गणित-शक्ति को अधिक पक्का बनाया जाता है।

(3) इसके द्वारा समीकरण तैयार किया जाता है तथा इसके द्वारा दैनिक जीवन में आने वाली उन समस्याओं को हल किया जाता है, जो समस्याएँ अंकगणित द्वारा आसानी से हल नहीं की सकती हैं।

(4) इसके द्वारा इस प्रकार की सामग्री का प्रबन्ध किया जाता है, जो गणित की भिन्न-भिन्न शाखाओं के प्रयोग में आती है।

(5) भिन्न-भिन्न नवीन भाषाओं तथा चिन्हों का ज्ञान देना।

(6) मानसिक शिक्षा (Mental Training) में एक उपकरण के रूप में कार्य करना।

(7) भिन्न-भिन्न उदाहरणों द्वारा किसी तथ्य पर पहुँचना। इन तथ्यों को सूत्रों (Formulae) द्वारा प्रयोग करना।

बीजगणित पढ़ाने की विधियाँ (Methods of Teaching Algebra)

बीजगणित पढाने की दो विधियाँ प्रचलित हैं—एक तो 'समीकरण विधि' तथा दूसरी विधि 'सूत्र विधि' कहलाती है। परन्तु किसी भी विधि के प्रयोग में दोनों विधियों का ही प्रयोग होता है।

बीजगणित का प्रयोग समीकरण विधि से इस प्रकार हो सकता है—

यदि 7 में कोई संख्या जोड़ने से योग 12 होता है तो वह संख्या ज्ञात करो।

संख्या $+7 = 12$

क $+7 = 12$ दोनों पक्षों में 7 घटाने पर

क $+7-7 = 12-7$

क $= 5$

शिक्षक चाहे किसी भी विधि का प्रयोग करे, परन्तु उसको यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि बालक उसका तात्पर्य समझें, उनको उसमें रुचि हो तथा उसका प्रयोगात्मक विचार स्थिर महत्त्व का हो।

बीजगणित की प्रारम्भिक स्थिति (The Early Stage of Algebra)

सबसे प्रारम्भ में बालक को यह ज्ञान कराया जाय कि अंकों के स्थान पर अक्षर का प्रयोग कैसे होता है। उदाहरण के लिए, प्रश्न अग्र प्रकार पूछा जा सकता है–

निम्न में कितने सेमी होते हैं–

(i) 1 मी (ii) 2 मी (iii) 5 मी (iv) क मी।

प्रश्न–तुमने 2 मीटर के सेमी कैसे मालूम किये ?

उत्तर–मीटर की संख्या को 100 से गुणा किया।

प्रश्न–तो क मीटर से सेमी कैसे ज्ञात करोगे ?

उत्तर–उसी प्रकार क का भी 100 से गुणा कर देंगे।

इसी प्रकार क्षेत्रफल का आयतन ज्ञात करने में–एक आयत (Rectangle) का क्या क्षेत्रफल (Area) होगा, जिसकी एक भुजा 15" और दूसरी 5" है, एक भुजा 70" तथा दूसरी 20" है, एक भुजा क" तथा दूसरी 5" है, एक भुजा क" तथा दूसरी ख" है ?

भिन्न (Fraction) **के उदाहरण**–

प्रश्न–यदि 'क' आदमी किसी कार्य को 'ब' दिनों में करते हैं तो 'स' आदमी उसे कितने दिनों में करेंगे ?

हल–∵ 'क' आदमी कोई कार्य 'ब' दिन में करते हैं

∴ 1 आदमी कोई कार्य ब × क दिन में

∴ स आदमी कोई कार्य $\frac{\text{ब} \times \text{क}}{\text{स}}$ दिन में

यदि उपर्युक्त को बीच के पद के बिना हल किया जाय तो–

क आदमी करते हैं 'ब' दिन में

स आदमी करते हैं $\frac{\text{ब} \times \text{क}}{\text{स}}$ दिन में

प्रश्न–यदि स का मान क से कम हो तो दिनों की संख्या क से कम या अधिक होगी ?

बालक–अधिक होगी।

इसलिए अधिक संख्या से गुणा तथा छोटी से भाग करने पर हल ज्ञात हो जायगा।

ब × $\frac{\text{क}}{\text{स}}$ दिन ('ब' को 'स' से अधिक मान लिया गया।)

समस्याएँ तथा समीकरण (Problems and Equations)

बीजगणित का प्रारम्भ समस्या के हल (Solution of a Problem) से होना चाहिए। प्रारम्भ में बालक की हल करने (Manipulation) के कार्य में रुचि नहीं होती है। परन्तु धीरे-धीरे इस कार्य में दक्षता प्राप्त करने पर बालक समस्या को हल करने में रुचि लेने लगता है।

बीजगणित में यदि हल करने (Manipulation) से कार्य प्रारम्भ किया जाय तो बालक के सम्मुख एक समस्या (Problem) आनी चाहिए फिर वह उसको हल करे तो अधिक रुचिकर होता है। समस्या सम्मुख होने पर हल करने (Manipulation) में रुचि होती है और बालक सम्पूर्ण समस्या का हल निकालना चाहते हैं और समस्या को सही विधि द्वारा हल कर लेते हैं।

साधारण तथा सरल समस्याओं के हल करने में बालक किसी चिन्ह का प्रयोग न करके उसे अंकगणित की सहायता से हल कर लेते हैं, परन्तु बीजगणित का प्रयोग जब कठिन समस्याओं के हल करने में किया जाता है, तभी वे उसका आरम्भ जान सकते हैं।

उदाहरण हेतु एक प्रश्न बीजगणित प्रारम्भ करने वालों को दिया गया था। उसका हल किस भाँति किया गया, वह नीचे दिया है—

प्रश्न—दो मोटरें 24 और 30 किमी की चाल से दौड़ती हैं। यदि तेज मोटर धीमी मोटर को पकड़े जबकि धीमी मोटर 15 किमी चल चुकी हो तो पहली तेज मोटर दूसरी को कब पकड़ लेगी ?

इस प्रश्न को बालकों ने बीजगणित से आसानी से हल कर दिया। इसके पश्चात् उनको इसका हल अंकगणित से कराया गया। बालक दोनों विधियों को समझे और उन्होंने दो विधियों को सीखने की कोशिश भी की।

इस अवस्था में समस्या के शब्दों की ओर मुख्य रूप से ध्यान देना चाहिए। इसके साथ-ही-साथ समीकरण (Equation) का हल आधारभूत सिद्धान्तों पर आधारित होना चाहिए। इस अवस्था में समीकरण पक्षान्तर करने का बोध नहीं देना चाहिए।

उदाहरण—क + 6 = 9

प्रश्न—इस प्रश्न में क्या मुख्य बातें देखते हो ?

उत्तर—अज्ञात संख्या बायीं ओर है।

प्रश्न—ऐसी स्थिति में क्या करना चाहिए ?

उत्तर—दोनों पक्षों में से 6 घटा देते हैं।

इस तरह बालक स्वयं इस प्रकार के प्रश्न हल कर लेंगे। प्रश्नों में जहाँ कहीं भी कठिनाई प्रतीत हो, एक कुशल अध्यापक समय-समय पर इन कठिनाइयों को दूर करता हुआ चलता है। परन्तु इस प्रकार की कठिनाइयों की एक सूची तैयार कर लेनी चाहिए और धीरे-धीरे जैसे-जैसे बालक उनको समझते जायें, उनको सूची से अलग कर देना चाहिए।

नीचे एक सूची दी गयी है जिसका निवारण ऋणात्मक संख्याओं (Negative Numbers) का बोध देने से पहले होना आवश्यक है—

$$2\text{क} = 2 \times \text{क}$$

$$27 = 2 \times 10 + 7$$

$$19\,\text{क} + 13\,\text{क} = (19 + 13)\,\text{क} = 32\,\text{क}$$

उपर्युक्त कथन को अधिक सरल और रोचक बनाने के लिए 5क + 3क के स्थान पर 5 बन्दर +3 बन्दर यानी स्थूल (Concrete) उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

चिन्ह या संख्या से गुणा करना

$$8\text{ख}.\ 4,\ 4 \times 8\text{ख},\ 5\,(\text{क} + \text{ख})$$

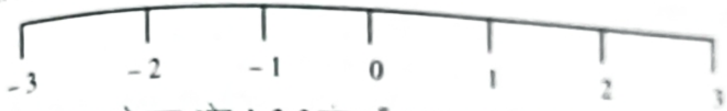
ऋणात्मक संख्याएँ (Negative Numbers)—ऋणात्मक संख्या के सीखने के बारे में भिन्न-भिन्न मत हैं। वास्तव में जब भी इसकी आवश्यकता हो, उसी समय इसका प्रयोग उपयुक्त होता है।

बालकों के सम्मुख एक समस्या रखी गयी। इस समस्या में एक व्यक्ति है जिसको ऊपर चढ़ना तथा नीचे उतरना है। इसके आधार पर एक समीकरण (Equation) तैयार किया गया—

$$3\text{क} + 6 + \text{क} - 20 = \text{क} + 7 + \text{क} - 3$$

बालकों ने 3क + क = 4क, क + क = 2क तथा 7 − 3 = 4 कर लिया, परन्तु कुछ बालक 6 − 20 का मान न निकाल सके। इसी स्थान पर ऋणात्मक संख्याओं का आरम्भ होना चाहिए। 6 − 20 का तात्पर्य यह है कि 6 गज ऊपर जाकर 20 गज नीचे उतर गया।

ऋणात्मक संख्याओं का ज्ञान एक पैमाने (Scale) के द्वारा निम्न रूप में दिया जा सकता है—



0 के स्थान से एक ओर 1, 2, 3 संख्याएँ तथा इनके विपरीत −1, −2, −3 आदि का प्रयोग किया जाता है।

ऋणात्मक संख्या का ज्ञान पर्याप्त अभ्यास के बाद स्वयं हो जाता है। इसके समझने में शीघ्रता नहीं करनी चाहिए। भिन्न-भिन्न स्थूल (Concrete) उदाहरणों द्वारा यह स्पष्ट हो जाता है। बालकों को स्वयं उदाहरणों के आधार पर एक नियम ज्ञात होना चाहिए; जैसे $(-2) \times (-3) = +6$ किसी नियम (Rule) पर आधारित होता है।

भिन्न जिनमें हर, संख्याओं में होते हैं (Fractions with Numerical Denominators)—इस प्रकार की भिन्नों में अधिक कठिनाई नहीं होती है, यदि अंकगणित में भिन्नों के हल करने का ज्ञान सही रूप में दिया गया हो।

लिखित कार्य में इस प्रकार की भिन्न के हल करने में कुछ कठिनाई होती है, जैसे $\frac{\text{ख} - 2}{2}$ परन्तु कोष्ठकों (Brackets) के प्रयोग करने से इसको हल करना सरल हो जाता है; जैसे—

$$\frac{2\text{ख} - 3}{3} - \frac{\text{ख} - 2}{2} = \frac{2\,(2\text{ख} - 3)}{6} - \frac{(3\text{ख} - 2)}{6}$$

$$= \frac{2\,(\text{ख} - 3) - (3\text{ख} - 2)}{6}$$

कोष्ठक के खोलने पर यह ध्यान रखना है − चिन्ह के पश्चात् आगे के चिन्ह बदल जाते हैं।

चिन्हों के नियम (Rules of Signs)

$$(+\,\text{क}) \times (+\,\text{ख}) = +\,\text{क ख}$$

$$(-\,\text{क}) \times (-\,\text{ख}) = +\,\text{क ख}$$

$$(+\,\text{क}) \times (-\,\text{ख}) = -\,\text{क ख}$$

$$(-\,\text{क}) \times (+\,\text{ख}) = -\,\text{क ख}$$

उर्पयुक्त चिन्हों के नियम वास्तविक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किये जाते हैं। इस तरह के उदाहरण लम्बाई-चौड़ाई (Length and Breadth), दर-समय (Rate and Time) या लाभ-हानि (Profit and Loss) आदि में ही हो सकते हैं।

उदाहरण–

एक व्यक्ति 2 मील प्रति घण्टे की चाल से चलता हुआ स्टेशन 'क' से दिन के 12 बजे गुजरता है यदि वह धनात्मक दिशा (+) में चल रहा हो तो 'क' से गुजरने के 2 घण्टे बाद वह 'क' से 6 मील दायीं ओर रहेगा। इसी प्रकार चली हुई दूरी +त्मक यानी + 6 मील तथा समय +त्मक यानी + 2 घण्टे होगा और यदि दायीं ओर की चाल को +त्मक माना जाय तो चाल भी + त्मक यानी + 3 होगी।

(1)
चाल × समय = दूरी
$(+3) \times (+2) = +6$

(2) यदि स्टेशन 'क' से गुजरने के 2 घण्टे पहले की स्थिति के बारे में विचार करें तो यह स्पष्ट होगा कि वह व्यक्ति स्टेशन के बायीं ओर 6 मील दूरी पर रहा। ऐसी स्थिति को निम्न प्रकार लिख सकते हैं–

चाल × समय = दूरी
$(+3) \times (-2) = -6$

(3) इसी प्रकार 2 घण्टे पहले की स्थिति में दूरी निम्न होगी–

चाल × समय = दूरी
$(-3) \times (-2) = +6$

(4) तथा 2 घण्टे बाद की स्थिति में दूरी होगी–

चाल × समय = दूरी
$(-3) \times (+2) = -6$

इस तरह के कुछ और उदाहरणों के द्वारा बालकों को स्पष्ट हो जायगा कि

$\frac{+\text{त्मक}}{+\text{त्मक}} = +\text{त्मक};$ $\quad \frac{+\text{त्मक}}{-\text{त्मक}} = -\text{ त्मक};$

$\frac{-\text{त्मक}}{+\text{त्मक}} = -\text{ त्मक};$ $\quad \frac{-\text{त्मक}}{-\text{त्मक}} = +\text{त्मक}$'।

सूत्रों का पढ़ाना (Teaching of Formulae)–सूत्रों को पढ़ाने में बड़ी सावधानी रखनी चाहिए। बालकों को इनका प्रयोग यान्त्रिक (Mechanical) रूप से करना चाहिए। सूत्रों को भिन्न-भिन्न उदाहरणों की सहायता से ज्ञात करना चाहिए। यदि बालक इस तरह सूत्र ज्ञात करेंगे तो उनको इनके प्रयोग करने में रुचि होगी। वे सूत्र बालकों के लिए वास्तविक वस्तु होगी, क्योंकि उनका ज्ञान बालकों को निगमन विधि (Inductive Method) द्वारा हुआ है।

उदाहरण के लिए, यदि सूत्र के बारे में बालकों को ज्ञान देना है तो निम्न विधि का प्रयोग किया जायेगा–

$(\text{अ} + \text{ब})^2 = \text{अ}^2 + \text{ब}^2 \times 2\,\text{अ ब}$, इस सूत्र का ज्ञान देता है।

पदार्थ (Matter)	विधि (Method)
(1) $5 \times 5 = 25$	(1) $(5)^2$ = क्या ?
(2) $3 + 2$ या 1×4 या $2 + 3$	(2) 5 को दो भागों में बाँटो ?
(3) $\begin{array}{r} 3 + 2 \\ \underline{3 + 2} \\ 9 + 6 \\ \underline{+6 + 4} \\ 9 + 12 + 4 = 25 \end{array}$	(3) $(3 + 2)^2$ = क्या होगा ?
(4) $\begin{array}{r} 5 + 2 \\ \underline{5 + 2} \\ 25 + 10 \\ \underline{+10 + 4} \\ 25 + 20 + 4 = 49 \end{array}$	(4) $(5 + 2)^2$ = क्या होगा ?
(5) $\begin{array}{r} \text{अ} + \text{ब} \\ \underline{\text{अ} + \text{ब}} \\ \text{अ}^2 + \text{अ ब} \\ \underline{+\text{अ ब} + \text{ब}^2} \\ \text{अ}^2 + 2\text{अ ब} + \text{ब}^2 \end{array}$	(5) $(\text{अ} + \text{ब})^2$ = क्या है ?

इस तरह से उपर्युक्त प्रश्नों के द्वारा इस परिणाम पर पहुँचा जा सकता है कि दो समान पदों का वर्ग जिनके बीच में + का चिन्ह होता है वह = प्रथम पद का वर्ग + प्रथम व द्वितीय पद के गुणा का दोगुना + दूसरे पद का वर्ग। इस निर्णय पर पहुँचने के बाद इससे सम्बन्धित प्रश्न कराने चाहिए तथा उनकी उपयोगिता पर ध्यान देना चाहिए। इस तरह से बालकों को यह ज्ञान हो जायेगा कि सूत्र (Formula) एक जीवित वस्तु है, जिसका प्रश्न को हल करने में एक मुख्य स्थान होता है। सूत्र (Formula) द्वारा भिन्न-भिन्न कठिन संख्याओं का वर्ग (Square) आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

गुणनखण्ड (Factors)–गुणनखण्ड का अध्ययन बीजगणित में बड़ा ही आवश्यक होता है। चूँकि खण्ड करना एक कठिन विधि है, इसलिए इसके अध्ययन में शिक्षक को विशेष ध्यान रखना चाहिए। गुणनखण्ड पढ़ाने में शिक्षक को ध्यान में रखना होता है कि किस रूप में उनका ज्ञान देना तथा किस सरल विधि का प्रयोग करना उपयुक्त है जिससे बालक उनको आसानी से तथा रुचिपूर्वक सीख लें। इनके पढ़ाने में भी स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग करना लाभदायक होता है। इसके पढ़ाने में निम्न विधि का प्रयोग करना होता है–

आगे एक पद है अ ब + ब स। इस तरह के दो पदों को ज्ञात करो जिनके गुणा करने से गुणनफल अ ब × ब स आता है।

हल—अ ब + ब स दोनों में क्या शामिल है ? 'ब' दोनों में शामिल है।

इसलिए इसको ब (अ + स) भी लिखा जा सकता है।

इस तरह से ब और (अ + स) दो पद हुए, जिनको गुणा करने से गुणनफल = अ ब + ब स आता है। ये ब (अ + स) उपर्युक्त के गुणनखण्ड (Factors) हुए।

गुणनखण्ड पढ़ाने में भी स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग करना चाहिए। इस तरह के उदाहरणों से यह क्रिया वास्तविक (Real) हो जायेगी और बालक उसमें रुचि भी लेंगे।

गुणनखण्डों को पढ़ाने से बालकों की सोचने की शक्ति (Thinking Power) को बढ़ाया जा सकता है। इसमें बिना समझे खण्ड याद करने के ऊपर जोर नहीं दिया जाना चाहिए। प्रश्न एक क्रम में (Graded) होने चाहिए। कुछ अभ्यास हो जाने के बाद कठिन खण्डों का ज्ञान देना चाहिए। इस तरह अधिक-से-अधिक विधियों का ज्ञान देना चाहिए, जिससे भिन्न-भिन्न पदों के खण्ड निकाले जा सकें।

समस्याएँ तथा समीकरण (Problems and Equations)

बीजगणित का प्रारम्भ समस्या के हल से होता है। समस्या समाधान में जो कार्य किया जाता है, उसका कुछ तात्पर्य होना चाहिए। बालकों को यह महसूस न हो कि केवल कार्य करना, नियमों का प्रयोग करना ही बीजगणित है; बल्कि वह समस्या को समझने का प्रयास करें। इसके लिए समस्या से प्रारम्भ करके चलना चाहिए, तभी उसके हल करने तथा नियमों का प्रयोग करने में बालकों की रुचि होगी। इस तरह बालक समस्या को हल करने में आनन्द लेंगे और सफलता से समस्या हल करेंगे।

बेसिक कक्षाओं में साधारण समीकरण (Equation) का प्रयोग आसान होता है। बालकों में समीकरण का प्रयोग बालकों द्वारा याद किये हुए सूत्रों के आधार पर ही होना चाहिए। माना कि दो बालकों को बगीचे में दो समान आयताकार (Rectangular) क्यारियाँ तैयार करनी हैं। यदि एक क्यारी का क्षेत्रफल = 160 वर्ग मीटर है और दूसरी क्यारी 16 मीटर लम्बी है तो दूसरी क्यारी कितनी चौड़ी होनी चाहिए। पहले बालक इनके चित्र तैयार कर लेंगे, फिर सूत्र लिखेंगे।

क्षे० (क्षेत्रफल) = ल० × चौ०

उपर्युक्त सूत्र (Formula) में दिये गये मान को लिख देते हैं; जैसे—

ल० × चौ० = क्षेत्रफल

ल० = 16

16 × चौ० = 160

$$\text{चौ०} = \frac{160}{16} = 10 \text{ मीटर}$$

इस तरह बालक समीकरण (Equation) का महत्त्व समझेंगे। समीकरण करने में पहला पद यह होता है कि बालक समझ लें कि इसमें क्या निकालना है। उनको सूत्र और समीकरण में स्पष्ट अन्तर ज्ञात होना आवश्यक है। सूत्र एक तथ्य (Fact) को लक्ष्य करता है तथा समीकरण का तात्पर्य एक प्रश्न से होता है।

साधारण समीकरण का प्रयोग अंकगणित (Arithmetic) तथा रेखागणित में उच्च कक्षाओं में आसानी से किया जाता है।

रेखाचित्र (Graph)

रेखाचित्र का महत्त्व (Importance of Graph)—रेखाचित्र का प्रयोग आजकल सभी क्षेत्रों में होता है। रेखाचित्र (Graph) के स्वयं अपने गुण होते हैं। किसी रेखाचित्र को देखने में उस विशेष वस्तु का ज्ञान एक साधारण चित्र के द्वारा हो जाता है। स्कूलों में रेखाचित्र का ज्ञान देना एक महत्त्वपूर्ण विषय हो गया है। निम्न कारणों से रेखाचित्र का प्रयोग स्कूल में होता है—

(1) रेखाचित्र का प्रयोग मुख्य रूप से बीजगणित में होता है। रेखाचित्र के द्वारा बीजगणित का ज्ञान स्थूल रूप में हो जाता है, इसके अभाव में बीजगणित के बहुत-से नियम स्पष्ट रूप से नहीं पढ़ाये जा सकते हैं।

(2) रेखाचित्र का प्रयोग हमारे दैनिक जीवन में समाचार-पत्रों तथा लेखों में किया जाता है। इसके बिना समझे हम समाचार-पत्रों का ज्ञान प्राप्त नहीं कर सकते हैं। इसलिए विद्यालय में इसका ज्ञान देना अति आवश्यक है।

(3) इसके द्वारा किसी विस्तृत वर्णन को सूक्ष्म (Concise) में रखा जा सकता है। इसलिए किसी भी ज्ञान को समझने के लिए रेखाचित्र का ज्ञान होना आवश्यक है।

(4) बहुत-से जटिल तथ्य (Facts) जो किसी और विधि से स्पष्ट नहीं किये जा सकते, उनको रेखाचित्र द्वारा स्पष्ट और सरल बनाया जा सकता है।

(5) रेखाचित्रों द्वारा बालक समीकरण सम्बन्धी प्रश्नों को सरलता से हल कर सकते हैं।

(6) रेखाचित्र का ज्ञान उच्च गणित (Higher Mathematics) के लिए एक आवश्यक आधार प्रदान करता है।

(7) रेखाचित्र साधारण समीकरणों के हल की अपेक्षा नवीनता रखते हैं जिससे बालक उनमें रुचि लेते हैं। इनका ज्ञान नेत्रों के द्वारा मस्तिष्क को जाता है। इस तरह पढ़ाते समय इन चित्रों के प्रयोग से वही लाभ होता है, जो कि विज्ञान में प्रयोग से होता है।

(8) रेखाचित्र द्वारा दो सम्बन्धित वस्तुओं का सम्बन्ध स्पष्ट होता है।

(9) इसके प्रयोग करने से कक्षा का बहुत समय बचता है जिसका उपयोग किया जा सकता है।

रेखाचित्र का प्रारम्भ करना (Introduction of Graphs) रेखाचित्र का प्रारम्भ बालकों के दैनिक जीवन की घटनाओं से सम्बधित करके करना चाहिए। शिक्षक को कार्य का विभाजन, तापमान (Temperature) का रेखाचित्र, आबादी (Population) का रेखाचित्र आदि के उदाहरण के आधार पर करना चाहिए। बालक को सरल चित्र से कठिन की ओर (Simple to Complex) ले जाना चाहिए। केवल रेखाचित्र (Graph) खींच देना ही पर्याप्त नहीं होता है, उसका समझना भी उतना ही आवश्यक है। रेखाचित्र खीचने में एक बिन्दु से दोनों ओर बिन्दु निश्चित करने में दो मात्राओं को दिखाया जा सकता है। उसके लिए रेखाचित्र (Graph) खिंचे श्यामपट्ट का प्रयोग किया जाना चाहिए। शिक्षक को अपनी कक्षा के बालकों को पर्याप्त अभ्यास देना चाहिए। रेखागणित की सहायता से समीकरण का हल भी बताना चाहिए।

समीकरणों द्वारा दो या दो से अधिक समस्याओं का हल रेखाचित्र की सहायता से किया जा सकता है। दो समानुपाती (Proportional) पदों का चित्र एक सीधी रेखा के रूप में आता है।

रेखाचित्र का आरम्भ कैसे किया जाता है ? (How to Introduce Graph ?)

(1) सर्वप्रथम स्थूल (Concrete) उदाहरणों का प्रयोग किया जाता है। जैसे—उनके स्कूल की भिन्न-भिन्न वर्षों में उन्नति का चित्र आदि। इसके पश्चात् ताप (Temperature), आबादी आदि के चित्र खींचे जा सकते हैं।

(2) इसके बाद बालकों से संख्याओं के खाने तैयार करने को कहा जाय, जैसे—लोहे की कीमत 0 पौण्ड से 8 पौण्ड तक खानों में मिलाकर रेखाचित्र खींचा जाय।

(3) बीजगणित-सम्बन्धी रेखाचित्र—इसमें 'अ' और 'ब' की कीमत समीकरण की सहायता से रेखचित्र खींचे—ब = 3 अ + 2 या ब = अ।

(4) इसके बाद भौतिकी (Physics) के रेखाचित्र द्वारा हल तैयार करें।

रेखाचित्र खींचना पढ़ाते समय निम्न बातें ध्यान में रखनी चाहिए (Points to be Kept in Mind while Teaching Graph)

(1) रेखाचित्र खींचने के साथ-ही-साथ उसको पढ़ाना (Interpret) तथा समझाना भी चाहिए। एक ताप (Temperature) रेखाचित्र द्वारा बालकों को किसी समय का ताप (Temperature) ज्ञात करने का ज्ञान होना चाहिए तथा कोई विशेष ताप किस समय है, आदि पढ़ना जानना चाहिए।

(2) बालकों को यह समझना चाहिए कि यदि दो मात्राएँ समानुपाती (Proportional) हों तो इस तरह का रेखाचित्र एक सीधी रेखा में आता है।

(3) रेखाचित्र खींचने में अधिक समय नहीं लगाना चाहिए।

(4) समीकरणों के हल को रेखाचित्र के द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है।

(5) प्रत्येक बिन्दु रखने में सावधानी से काम करना चाहिए।

■■

20

रेखागणित की पाठन-विधि

[TEACHING METHOD OF GEOMETRY]

व्यक्ति के सांस्कृतिक ज्ञान हेतु रेखागणित का अध्ययन बड़ा महत्त्वपूर्ण है। इसके द्वारा व्यक्ति की तर्क-शक्ति का विकास होता है। रेखागणित के अध्ययन से मनुष्य की बुद्धि तीव्र तथा तर्क-शक्ति (Reasoning power) का विकास होता है। बालक में खोज करने की प्रवृत्ति पैदा होती है। वह वस्तुओं की आवश्यक बनावट पर ध्यान देता है। साधारण रेखाओं के द्वारा वह भिन्न-भिन्न सुन्दर नमूने तैयार करता है।

परन्तु हमारे स्कूलों में रेखागणित के अध्यापन की ओर कोई विशेष ध्यान नहीं दिया जाता है। बालक साध्यों (Theorems) तथा अभ्यास (Exercises) के हलों को बिना समझे ही कण्ठस्थ कर लेते हैं। इसके साथ-ही-साथ बनावट या रचना (Construction) सम्बन्धी प्रश्नों को भी बालक रट लेते हैं और परीक्षा में लिख आते हैं। समस्या के हल करने में भी किसी प्रकार का संश्लेषण (Synthesis) तथा विश्लेषण (Analysis) क्रिया का प्रयोग नहीं करते। इस तरह से रेखागणित का मुख्य उद्देश्य (Objective) सफल नहीं हो पाता है।

रेखागणित पढ़ाने के सामान्य उद्देश्य (General Aims of Teaching Geometry)

(1) बालकों को बहुत-से रेखागणित सम्बधी तथ्यों (Facts) के बारे में ज्ञान कराना।

(2) उन तथ्यों का आपस में सम्बन्ध समझाना।

(3) इन तथ्यों का दैनिक जीवन में प्रयोग कराना।

वास्तव में रेखागणित का आरम्भ बच्चे के पैदा होने के पश्चात् ही हो जाता है, परन्तु उस अवस्था से हमारा सम्बन्ध नहीं होता है। बालक रेखागणित का ज्ञान या तो जूनियर या सेकण्डरी की अवस्था से प्रारम्भ करता है। इस समय उसकी आयु 10 वर्ष तक होती है।

बालक के कक्षा में प्रवेश करने पर उसको साधारण इंच तथा उसके भागों में—गजों, फुटों आदि में नापने को कहा जाय। इसके अतिरिक्त कुछ समय बाद वह सेण्टीमीटर (Centimetre) तथा मिलीमीटर (Millimetre) इकाइयों में वस्तु को नाप सकता है।

इसके साथ-ही-साथ उसको कुछ रेखागणित-सम्बधी शब्दों (Vocabulary) का ज्ञान भी कराना चाहिए। इनमें से बिन्दु (Point), वर्ग (Square), वृत्त (Circle),

सीधा (Straight), लम्बा (Long), पतला (Thin) आदि मुख्य हैं। परन्तु अधिक शब्दावली का प्रयोग न किया जाय।

बालकों को इस अवस्था में क्षेत्रफल (Area), आयतन (Volume) का ज्ञान अंकगणित से होता है। वे एक समकोण (Right angle) को पहचान सकते हैं; परन्तु कोण (Angle) का सही ज्ञान उनको नहीं रहता है। उनको सीधी रेखा (Straight Line) का ज्ञान भी होता है।

रेखागणित की प्रथम सीढ़ी या स्तर (FIRST TERM OF GEOMETRY)

अध्यापक का उद्देश्य (Teacher's Aim)

रेखागणित प्रारम्भ करने में एक उद्देश्य सम्मुख होना चाहिए। वह उद्देश्य बालकों द्वारा रेखागणित-सम्बन्धी तथ्यों का समझना (To acquire geometrical facts); उनका आपस में सम्बन्ध जानना तथा उनका दैनिक जीवन में प्रयोग करना होना चाहिए।

अध्यापक का प्रारम्भ का उद्देश्य (Teacher's Aim of the First Term)—इस अवस्था का उद्देश्य बालकों को रेखागणित-सम्बन्धी शब्दावली (Geometrical Vocabulary) का विस्तृत ज्ञान कराना होता है। इसका ज्ञान होने पर बालक सही रूप में उनका प्रयोग भी कर सकते हैं। परिभाषा (Definition) की सीढ़ी बाद में आती है।

इसके अतिरिक्त बालक को रेखागणित के चित्रों को पहचानना तथा कक्षा के बाहर इस तरह की आकृतियों (Figures) को समझना भी होता है।

इसके अतिरिक्त बालकों को यह समझना होता है कि अमुक चित्र उसके स्तर के अन्दर है। इसका प्रथम उद्देश्य सही चित्र खींचने का भी होना चाहिए।

प्रथम पाठ (First Lesson)—प्रथम पाठ में भिन्न-भिन्न प्रकार के चित्रों को, वस्तुओं को देखकर पहचानना होता है; जैसे—लकड़ी के टुकड़े बने वर्ग (Square), आयत (Rectangle), घन (Cube), गोला (Sphere) आदि की शक्ल एक समय में पहचानी जाती है। बालकों को स्वयं उनकी भुजाओं, किनारों तथा कोणों का गिनने का मौका देना चाहिए।

इसके बाद बिना वस्तु या चित्र के उनसे स्वयं किसी वर्ग की भुजाओं के बारे में मस्तिष्क का चित्र बनाकर पूछो। इस तरह से घन (Cube) आदि शक्लों के बारे में प्रश्न करने चाहिए।

इसके पश्चात् वस्तुओं की सहायता से बालकों को चित्र खींचने को कहा जाय। पहले वस्तु का सुन्दर चित्र खींचने को कहा जाय, फिर बाद में उनको समझकर चित्र खींचा जाय। पहले वर्ग बने कागज पर, फिर साधारण कागज पर चित्रों को खींचा जाय।

इसी तरह दियासलाई के बक्स के भीतरी भाग को चारों किनारों पर काटने के बाद उसका चित्र खींचा जाय। चित्र में कोण देखने तथा बराबर भुजाओं पर निशान लगाने को कहा जाय। इस तरह कार्ड-बोर्ड के द्वारा भिन्न-भिन्न चित्रों के बनाने का अध्ययन करना चाहिए।

इतना पढ़ाने के बाद दिशा (Direction) का ज्ञान देना चाहिए। इसमें क्षैतिज

(Horizontal), ऊर्ध्वाधर (Vertical) दिशा का ज्ञान देना आवश्यक है। इसके साथ उत्तर या दक्षिण दिशा के बारे में भी ज्ञान दिया जाय।

दिशा के ज्ञान के बाद कोण (Angle) का ज्ञान दिया जाना चाहिए। बालकों को इस स्थिति में समकोण का ज्ञान होता है परन्तु उनको समकोण का वास्तविक ज्ञान नहीं होता है। वे इस कोण को कोई निश्चित आकार समझते हैं।

कोण का ज्ञान देने के लिए घड़ी की सुई द्वारा, स्वयं दायें घुमाकर तथा लकड़ी के टुकड़ों का प्रयोग किया जा सकता है। इसके बाद चित्र खींचकर कोण बनाकर भी कोण का ज्ञान दिया जा सकता है। भिन्न-भिन्न उदाहरणों के आधार पर बालकों को यह समझा दिया जाता कि एक सीधे तल पर दूसरे तल के झुकाव (Inclination) को कोण कहते हैं।

इस तरह एक समकोण (Right angle) का सही ज्ञान होने पर उसे न्यून कोण (Acute angle) तथा अधिक कोण (Obtuse angle) का ज्ञान देना चाहिए। समकोण से छोटे कोण को न्यून (Acute) कोण तथा बड़े कोण को अधिक (Obtuse) कोण कहते हैं।

इसके पश्चात् चाँदे (Protractor) का प्रयोग करना चाहिए। इसके आधार पर अंश (Degree) का ज्ञान हो जाता है। इसका ज्ञान होने पर भिन्न-भिन्न अंशों (Degree) के कोण नापने का अभ्यास दे देने के उपरान्त बालकों से भिन्न-भिन्न अंशों के कोण खिंचवाने चाहिए। इस स्थिति में पर्याप्त अभ्यास की आवश्यकता होती है।

पटरी द्वारा चित्र खींचना (Drawing Scale)—चित्र खींचने के लिए इस तरह के पाठ (Plan) तैयार करो जिनमें बालक लम्बाई (Length) तथा कोण (Angles) नाप सकें। इस पाठ में शहर या कस्बे का नक्शा, स्कूल का नक्शा, खेल के मैदान आदि का नक्शा प्रयोग में लाया जा सकता है। इस तरह से 1 सेमी को 1 किमी में, 1 सेमी को 1 मीटर तथा 1 सेमी को 10 मीटर के पैमाने में बदला जा सकता है। अभ्यास के लिए बालकों के परिचित स्थानों का प्रयोग किया जा सकता है।

इस तरह के पाठों में नाप का अभ्यास हो जाने के पश्चात् उनको खींचने का अभ्यास कराना उचित है। इस तरह बिना नापे चित्र तैयार करके उसको नापना तथा बिल्कुल सही नाप का चित्र खींचने का अभ्यास करना चाहिए। इस तरह चित्र खींचने में निम्न पदों से होकर कार्य करना पड़ता है—

(1) बालक का प्रत्येक चित्र शिक्षक को जाँच लेना चाहिए।
(2) प्रत्येक चित्र खींचने से पहले आवश्यक तैयारी कर लेनी चाहिए।
(3) तैयारी के पश्चात् स्वयं चित्र खींचने चाहिए।
(4) बालक को बिना पैमाने की सहायता से चित्र खींचने का अभ्यास कई वर्ष तक कराना चाहिए।

चित्र खींचने में शुद्धता (Accuracy) तथा स्वच्छता (Neatness) पर विशेष ध्यान देना चाहिए। प्रश्न का प्रयोग 'सरल से कठिन की ओर' होना चाहिए। इस तरह से बालकों को इस स्तर पर सूर्य की छाया, उससे बना कोण आदि का अभ्यास कराना चाहिए। कुछ बालक त्रिभुज के कोणों का अनुमान लगा लेते हैं। ऐसे बालकों को बढ़ावा देना चाहिए। इस तरह से इस स्तर पर बालकों को कुछ रेखागणित-सम्बन्धी तथ्यों का ज्ञान हो जाना आवश्यक होता है।

रेखागणित का दूसरा स्तर
(SECOND TERM OF GEOMETRY)

इस स्तर पर हमारा अभिप्राय बालकों को कुछ रेखागणित के तथ्यों को समझाना तथा उनका प्रयोग कराना होता है।

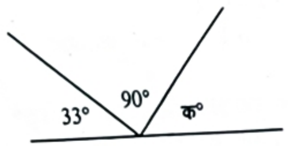
एक बिन्दु पर कोण खींचना (To Draw an Angle at a Point)

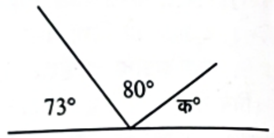
किसी भी साध्य या प्रमेय को प्रारम्भ करने में उसकी साधारण प्रतिज्ञा (Enunciation) प्रारम्भ में न आनी चाहिए। यह सबसे गलत विधि है कि हम इस तरह से करें कि हमें यह सिद्ध (Prove) करना है कि एक सीधी रेखा दूसरी सीधी रेखा पर खड़ी है तो इस तरह से जो कोण बनेंगे, उनका योग = दो समकोण के बराबर होगा।

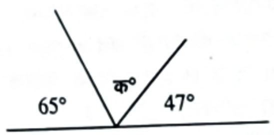
इस स्तर पर बालकों को सिद्ध (Prove) करना और उपपत्ति (Proof) का सही ज्ञान देना चाहिए। इस स्तर पर बालकों में कार्य प्रारम्भ करने की क्षमता (Initiative) का विकास करना होता है। बालकों को स्वयं अपने-अपने हल कक्षा में समझाने चाहिए। इसके बाद उनके हल की कक्षा में विवेचना करनी चाहिए।

एक प्रमेय (Theorem) जिसमें दोनों कोणों का योग = 2 समकोण के होता है। यदि इस प्रमेय में बालक चाँदे (Protractor) का प्रयोग करता है तो वह नाप कर ज्ञात कर लेगा कि इस तरह के बने दोनों कोणों का योग = 2 समकोण के बराबर है। परन्तु प्रमेय में पटरी द्वारा खींचे गये चित्र द्वारा सिद्ध करना होता है। बालकों को स्वयं तथ्य ढूँढने का मौका देना चाहिए। इससे बालक विषय में रुचि लेंगे, परन्तु इसके साथ-ही-साथ अभ्यास-कार्य अवश्य होना चाहिए। प्रमेय (Theorem) के सिद्ध करने में खोज-विधि (Heuristic Method) का प्रयोग किया जाना लाभप्रद होता है। बालकों की आयु के आधार पर ही किसी समस्या को उनको देना चाहिए।

बालकों के पास एक कापी होनी चाहिए जिसमें प्रत्येक प्रमेय की प्रतिज्ञा (Enunciation) लिखनी चाहिए। इस तरह परिणामों की पुष्टि वास्तविक रूप से कोणों के मान की सहायता से घर पर गृह-कार्य के रूप में कर लेनी चाहिए। शिक्षक श्यामपट्ट (Black-board) पर कुछ त्रिभुजों के चित्र खींचकर उसके एक-दो कोणों का मान लिखकर बालकों को तीसरे कोण का मान ज्ञात करने को कहेगा तथा इस तरह के पर्याप्त अभ्यास करायेगा। अज्ञात कोण के लिए कोई अक्षर लिख देना उचित होता है। इसी तरह सम्पूरक (Supplementary) शब्द तथा कोण का परिचय भी देना चाहिए। इस तरह से निम्न कोणों का मान निकालने के अभ्यास देने चाहिए–







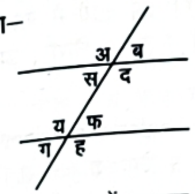
उपर्युक्त कोणों का मान ज्ञात करने पर बालकों को यह ज्ञात कराना चाहिए कि यदि बहुत-सी सीधी रेखाएँ एक बिन्दु पर मिलती हैं तो उनके द्वारा बने कोणों का योग = 4 समकोण के बराबर होगा। इस युक्ति पर भी बालकों को यह न बताया जाय कि एक बिन्दु पर बने कोणों का योग = 4 समकोण के बराबर होता है, बल्कि स्वयं बालकों को चित्र खींचकर कोणों को नापकर कोणों का योग ज्ञात करना चाहिए। अध्यापक स्वयं यह बतायेगा कि वह प्रमेय (Theorem) पहली प्रमेय के चित्र को बढ़ा देने से तैयार की जा सकती है यानी प्रथम प्रमेय के चित्र की किसी रेखा को बिन्दु से आगे बढ़ाने से दूसरी प्रमेय सम्मुख आ जाती है।

इसके बाद गुणा का चिन्ह बढ़ाकर जो सम्मुख कोण (Vertical Opposite Angles) बनते हैं, वे आपस में बराबर होते हैं। कक्षा में बालकों को स्वयं चित्र खींच-कर कोणों को नापना चाहिए। इसके आधार पर यह प्रमेय सिद्ध की जा सकती है।

युक्ति का आरम्भ कब करना चाहिए ?
(WHEN SHOULD LOGIC BE INTRODUCED ?)

हालांकि युक्ति का आरम्भ बालक में छोटी अवस्था में ही हो जाता है, फिर भी रेखागणित को सीखने में बालक को उसका दास नहीं होना चाहिए। बालक की उन्नति में युक्ति के अभाव के कारण किसी प्रकार की बाधा नहीं डालनी चाहिए। इस अवस्था से हमारा तात्पर्य तथ्य (Fact) जानना होता है। परन्तु कभी-कभी इस बात की परीक्षा करना आवश्यक है कि बालक इन तथ्यों में युक्ति के सम्बन्ध का भी ध्यान रखे। इस अवस्था में युक्ति (Logic) सम्बन्धी युक्ति के विकास की ओर अधिक ध्यान देने की आवश्यकता नहीं होती है।

उदाहरण–



इस चित्र में
∠ब = ∠फ
तो सिद्ध करो कि
∠स = ∠फ के

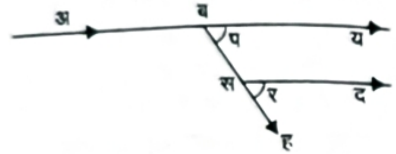
इस तरह के प्रश्न में बालक को स्वयं चित्र बनाकर जिन कोणों को बराबर सिद्ध करना है, उन पर चिन्ह लगा दें। फिर युक्तिसंगत विधि से उसको हल कर लें; जैसे–

दिया है–	∠ब = ∠फ
सिद्ध करना है–	∠स = ∠ब
उपपत्ति (Proof)–	∠ब = ∠स (सम्मुख कोण)
परन्तु	∠ब = ∠फ
∴	∠स = ∠फ

समान्तर सीधी रेखाएँ (Parallel Straight Lines)

समान्तर रेखाओं की परिभाषा आरम्भ में नहीं देनी चाहिए। इसका ज्ञान एक उदाहरण के द्वारा दिया जा सकता है। इसके द्वारा स्वयं विद्यार्थी उसकी परिभाषा बता देंगे।

एक आदमी अ से ब की ओर चलता है। उसकी एड़ी कहाँ होगी ? उसकी अँगुलियाँ कहाँ है ? अब वह अपनी एड़ी को मोड़कर ब स की ओर चलता है। जब वह मुड़ता है तो उसकी अँगुलियाँ कहाँ है ? ब स की दिशा की ओर वह कितने अंश के कोण पर मुड़ा—प° के। अब वह स द दिशा को चलता है। इस ओर चलने पर वह फिर पहले वाली दिशा की ओर चलता है, तो ∠र कितना होगा ? ∠प और ∠र आपस में बराबर होंगे। इस उदाहरण से क्या परिभाषा बना सकते हो ?



जब कोई सीधी रेखा दो और सीधी रेखाओं को काटती है तो इस तरह जो संगत कोण (Corresponding Angles) बनते हैं, वे यदि आपस में बराबर हों तो दोनों रेखाएँ समान्तर (Parallel) होती हैं। इसको विपरीत विधि के रूप में भी कहा जा सकता है। इस तरह के उदाहरणों को वास्तविक कोणों के मान द्वारा भी समझाया जा सकता है। दूसरे पाठ में फिर समान्तर रेखा, संगत कोण (Corresponding Angles) का अभ्यास कर लेना चाहिए। इसके बाद इससे सम्बन्धित साध्य हल करने के लिए दे देनी चाहिए। यह कार्य युक्तिसंगत होना चाहिए। इस तरह भिन्न-भिन्न उदाहरणों के द्वारा उपर्युक्त ज्ञान को स्पष्ट किया जा सकता है।

उपर्युक्त अभ्यास के बाद यन्त्रों (Instruments) की सहायता से समान्तर रेखाएँ (Parallel Lines) बनाने का कार्य दे देना चाहिए। इस कार्य में बालक को पर्याप्त अभ्यास कर लेना आवश्यक है। इस तरह से इस स्थिति में किसी रेखा पर लम्ब की रचना भी करायी जा सकती है।

एक त्रिभुज के कोणों का योग (Sum of the Angles of a Triangle)

उपर्युक्त प्रमेय (Theorem) को सिद्ध करने के लिए बालकों से त्रिभुज खींचने को कहा जाता है। इनके कोणों को नापकर उनका योग ज्ञात किया जाता है। इस तरह बालकों को यह स्पष्ट हो जायेगा कि त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग = 2 समकोण होता है। इसकी उपपत्ति कागज के कटे त्रिभुजों के कोणों को नापने से भी सिद्ध हो जाती है। इसको सिद्ध करने के लिए आधार को आगे बढ़ा कर एक भुजा के समान्तर रेखा खींचकर दो अन्तःकोणों (Interior Angles) का योग बाह्य (Exterior) कोण के बराबर सिद्ध किया जा सकता है।

इस तरह भिन्न-भिन्न प्रकार के त्रिभुजों की रचना करके उपर्युक्त को सिद्ध किया जा सकता है।

पटरी द्वारा चित्र खींचना

1. हाथ से खिंचा प्रत्येक चित्र स्वच्छ और बड़ा होना चाहिए।
2. इसकी तुलना वास्तविक चित्र से करनी चाहिए।
3. चित्र में प्रत्येक रेखा पर दी हुई लम्बाई लिख देनी चाहिए।

4. प्रमेय (Theorem) की सहायता से जो नवीन कोण तथा भुजा का मान ज्ञात किया गया हो, उसको भी लिख देना चाहिए।
5. इस स्थिति में मौखिक अभ्यास देना भी लाभप्रद होता है।
6. जहाँ तक हो सके, चित्र सही होना चाहिए।
7. रचना में खींची गयी रेखाओं को मिटाना नहीं चाहिए।
8. प्रश्न के उत्तर को शब्दों में लिखना चाहिए।

इस तरह दूसरे स्तर का कार्य करने के पश्चात् कक्षा के बालकों में चित्र खींचने का कौशल, रेखागणित-सम्बन्धी तथ्य (Fact) तथा युक्तिसंगत उपपत्ति (Logical Proof) का ज्ञान हो जाता है। इस प्रकार बालकों में रेखाचित्र खींचने का उत्साह होता है। इसकी समाप्ति पर तीसरे स्तर (Third Term) का कार्य प्रारम्भ करना चाहिए।

रेखागणित का तीसरा स्तर
(THIRD TERM OF GEOMETRY)

त्रिभुजों की रचना तथा त्रिभुजों की अनुरूपता (Construction of Triangles and Congruency of Triangles)

इसका मुख्य तात्पर्य—बालकों को रेखागणित-सम्बन्धी अन्य तथ्यों (Facts) का ज्ञान, प्रमेय (Theorems) का ज्ञान और चित्र खींचने का ज्ञान देना होता है।

इसमें सर्वप्रथम दिये हुए मान के आधार पर भिन्न-भिन्न रूप के त्रिभुजों की रचना (Construction) करना होता है। यदि त्रिभुज के तीन आवश्यक भाग दिये गये हों तो त्रिभुज की रचना सरलता से की जा सकती है। त्रिभुज के दो कोणों का मान ज्ञात होने पर तीसरे कोण का मान ज्ञात हो जाता है। इसके पश्चात् त्रिभुज की तीनों भुजाओं का मान ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना की जा सकती है। यदि त्रिभुज में एक कोण ज्ञात हो तो पहले एक भुजा पर कोण खींचकर तब तीसरी भुजा खींची जाती है।

इस तरह से बालकों को यह ज्ञात हो जायेगा कि किसी त्रिभुज की रचना के लिए तीन बातें ज्ञात होनी आवश्यक हैं। इसके बाद त्रिभुज की रचना का पर्याप्त अभ्यास आवश्यक है। इस तरह बालक को परकार (Compass) का प्रयोग करना भी आ जाता है। इसी प्रकार चतुर्भुज (Quadrilateral) खींचने का ज्ञान भी दिया जाता है।

अनुरूप त्रिभुज (Congruent Triangles)—इस तरह के त्रिभुजों का ज्ञान निम्न रूप से दिया जा सकता है—

(1) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनके बीच का कोण दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं तथा उनके बीच के कोण बराबर हों;

(2) यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण और संगत भुजा के समान हों (इसमें भुजा की ओर ध्यान देना चाहिए।);
—(भुजा जो कोण बनाती है)

(3) यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अलग-अलग बराबर हों;

(4) यदि दो समकोण त्रिभुजों में एक का कर्ण तथा एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण तथा संगत भुजा के बराबर हों;

तो त्रिभुज अनुरूप होंगे।

इस स्तर पर बालक स्वयं त्रिभुज की रचना कर सकते हैं। परन्तु बिल्कुल सही चित्र खींचने पर जोर न देना चाहिए। अभ्यास हेतु कागज पर प्रत्येक बालक त्रिभुज की रचना करेगा तथा अपने पास के बालक के द्वारा खींचे त्रिभुज से तुलना करेगा। यदि त्रिभुजों का मान बराबर होगा तो वे एक-दूसरे को ढँक लेंगे।

जब बालकों को त्रिभुज की अनुरूपता (Congruency) का सही ज्ञान हो जाता है तो वे प्रमेय (Theorem) तथा अभ्यास (Exercises) को आसानी से हल कर सकते हैं।

समद्विबाहु त्रिभुज की रचना (Construction of an Isosceles Triangle)—इस स्थान पर समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) सम्बन्धी प्रमेय (Theorem) को सिद्ध करना समझाया जा सकता है। इस प्रमेय को शीर्ष कोण (Vertical Angle) के समद्विभाजन द्वारा सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय तथा उसका विलोम (Theorem and its Converse)—किसी प्रमेय में दो भाग होते हैं—(1) जो कुछ दिया गया है, (2) उसका परिणाम। यदि परिणाम और जो कुछ दिया गया है उसको उल्टा कर दें तो वह प्रमेय का विलोम कहलायेगा; जैसे—

अ ब = **अ स** तो ∠**स** = ∠**ब** (प्रमेय)

और यदि ∠**स** = ∠**ब** तो **अ ब** = **अ स** (विलोम)

इस तरह कक्षा में प्रमेय देकर उसे विलोम (Converse) लिखने को कहा जाता है। परन्तु किसी प्रमेय (Theorem) का विलोम सदैव सत्य नहीं भी होता है; जैसे—

प्रमेय यह है कि एक त्रिभुज में एक कोण = समकोण, तो उसे दोनों कोण न्यून कोण होंगे।

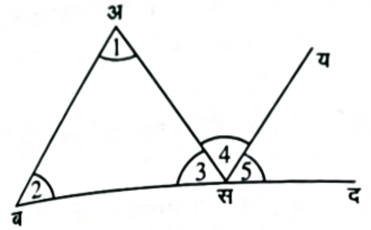
विलोम—यदि त्रिभुज के दो कोण न्यून कोण हैं तो तीसरा जरूर समकोण होगा—परन्तु यह सत्य नहीं है।

इसके लिए बालकों को सही विलोम की सूची तैयार करनी चाहिए।

रेखागणित-सम्बन्धी कुछ आवश्यक सुझाव
(SOME IMPORTANT SUGGESTIONS REGARDING GEOMETRY)

संश्लेषण तथा विश्लेषण (Synthesis and Analysis)—प्रमेय (Theorem) तथा अभ्यास (Exercise) सिद्ध करने में संश्लेषण तथा विश्लेषण (Synthesis and Analysis) का प्रयोग किया जाता है। संश्लेषण का प्रयोग, आवश्यक परिणाम से पहले जितने भी आवश्यक चित्र खींचे जाते हैं, उनमें होता है। विश्लेषण विधि में हम अन्त की उपपत्ति (Proof) के पद से आरम्भ करते हैं तथा प्रश्नों के आधार पर जो कुछ बालक जानते हैं, आगे बढ़ते जाते हैं। संश्लेषण विधि में बालक क्रियाहीन (Passive) होते हैं तथा तथ्यों को स्वीकार करते हैं। विश्लेषण विधि में बालक क्रियाशील (Active) होते हैं तथा प्रमेय के हल (Solution) को 'क्यों' (Why) और 'कैसे' (How) समझते हैं। दोनों विधियों के अपने गुण और दोष (Advantages and Disadvantages) हैं। केवल एक का प्रयोग पर्याप्त नहीं है। इसलिए किसी प्रमेय या अभ्यास को सिद्ध करने में दोनों का प्रयोग आवश्यक होता है। दोनों विधियों के उदाहरण नीचे दिये गये हैं।

प्रमेय (Theorem)—किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग दो समकोण के बराबर होता है।



संश्लेषण हल (Synthetic Proof)—

दिया है (Given)—**अ ब स** एक त्रिभुज है।

सिद्ध करना है (To Prove)—$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण के।

रचना (Construction)—**ब स** को **द** तक बढ़ाया। **स** पर **स य** रेखा **अ ब** के समान्तर (Parallel) खींची।

उपपत्ति (Proof)— ∵ **य स** ∥ **अ ब** और **अ स** उनको काटती है।

∴ $\angle 1 = \angle 4$ — एकान्तर कोण (Alternate Angles) हैं।

∴ **य स** ∥ **अ ब** और **ब द** उनको काटती है।

∴ $\angle 2 = \angle 5$ — संगत कोण (Corresponding Angles) हैं।

दोनों को जोड़ने से

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4 + \angle 5$$

इन दोनों में $\angle 3$ जोड़ दिया,

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 3$$

= 2 समकोण (एक सीधी रेखा के कोण)

विश्लेषण (Analysis)—

सिद्ध करना है— $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2$ समकोण के।

जब $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 =$ 2 समकोण।

यदि वे एक सीधी रेखा पर एक ओर बने हैं।

$\angle 3$ एक सीधी रेखा पर बना है।

ब स रेखा को **द** बिन्दु तक बढ़ाया।

आप $\angle 1$ और $\angle 2$ को किस प्रकार $\angle 3$ के साथ रख सकते हो ? पहले $\angle 1$ को $\angle 3$ के पास लाते हैं।

यह किस प्रकार रख सकते हैं ?

क्या इस स्थिति में एकान्तर कोण सहायता कर सकते हैं ? हाँ, तब **स** पर एक एकान्तर कोण बना लो, जो कि $\angle 1$ के बराबर हो। यह किस प्रकार से किया जा सकता है ? यदि **स** से **स य** रेखा **अ ब** के समान्तर खींच लें।

इस तरह $\angle 1 = \angle 4$ जो कि $\angle 3$ के समीप है।

अब ∠2 को ∠4 के पास लाना है। यह कैसे हो सकता है ? संगत कोण किसे कहते है ? क्या इस स्थान पर संगत कोण सहायता दे सकते हैं ? हाँ।

∠2 का कोण संगत कोण है ? ∠2 = ∠5 संगत कोण।

इस तरह $\angle 1 = \angle 4$

और $\angle 2 = \angle 5$

तथा ∠1, ∠2 और ∠3 एक सीधी रेखा के कोण हो गये। इनका योग = 2 समकोण के।

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2 \text{ समकोण के।}$$

रेखागणित में विश्लेषण (Geometrical Analysis)—रेखागणित के विश्लेषण में निम्नलिखित बातें ध्यान में रखनी चाहिए—

(1) दिये गये चित्र से मिलती-जुलती शक्ल बनानी चाहिए। हो सकता है कि उनके मान समान न हों।

(2) चित्र में सभी रेखाओं, कोणों आदि को, जो दिये गये हैं, ज्ञात करके उन पर चिन्ह लगा दो।

(3) चित्र-सम्बन्धी जितने भी त्रिभुज बनाये जा सकें, उनको बना लो और जिससे समस्या हल करने में सहायता मिल सके, उसकी सहायता ले लो।

(4) यदि कोई इस तरह का त्रिभुज उपलब्ध न हो, तो रेखाओं की सहायता से इस तरह का त्रिभुज तैयार कर लो।

रेखागणित में अभ्यास का महत्त्व (Importance of Exercise in Geometry)

(1) अभ्यास के द्वारा बालकों में मूल (Original) विचार-शक्ति तथा तर्क-शक्ति (Reasoning) का विकास होता है। इसके द्वारा प्राप्त ज्ञान से बालकों में गणित की ओर रुझान होता है।

(2) अभ्यास के द्वारा गणित में वास्तविक रूप से प्रवेश करना होता है। सरल अभ्यास को हल करना अधिक रुचिकर होता है। इसके द्वारा रेखागणित प्रारम्भ करने वाले को विषय का सही ज्ञान होता है।

(3) अभ्यास के द्वारा बालकों में विषय के प्रति रुचि (Interest) पैदा होती है। साधारण गणित-सम्बन्धी तत्त्व की खोज बहुत-सी सूचना की अपेक्षा अधिक रुचिकर होती है।

(4) अभ्यास एक क्रम (Graded) में होते हैं। इनसे बालक धीरे-धीरे सरल से कठिन (Easy to Difficult) की ओर बढ़ता है। यह मनोवैज्ञानिक ढंग बालक के लिए बड़ा ही लाभदायक है।

(5) अभ्यास के द्वारा गणित के याद किये गये तथ्यों (Facts) की पुनरावृत्ति (Recapitulation) होती है। इनके द्वारा बालक की योग्यता (Ability) का पता भी चलता है।

अभ्यास हल करने हेतु निर्देश (General Direction in Solving the Exercises)

अध्यापक को अग्र निर्देश देने चाहिए—

(1) चित्र खींचते समय सबसे आसान तथा सम्भव चित्र खींचो। यदि त्रिभुज का नाम दिया है तो चित्र पर ही उसका नाम लिख दो।

(2) अभ्यास (Exercises) को ध्यान से पढ़ो और प्रत्येक शब्द के अर्थ को समझने की कोशिश करो; यह स्पष्ट हो जाय कि अभ्यास में क्या दिया है और क्या ज्ञात करना है।

(3) त्रिभुज के सिरों के लिए अंग्रेजी में बड़े अक्षर तथा भुजाओं के लिए छोटे अक्षरों का प्रयोग करो; परन्तु हिन्दी में इनके विपरीत।

(4) किसी अभ्यास को सिद्ध करने के लिए प्रत्येक सम्भव प्रमेय (Theorem) आदि को ध्यान में रखकर उसकी सहायता से अभ्यास करने की कोशिश करो।

(5) प्रश्नों के आधार पर कुछ सहायता (Help) ली जा सकती है।

रचना सम्बन्धी कुछ आवश्यक आदेश (Instructions Regarding the Constructions)

(1) रचना करने में रेखागणित के बक्स को देख लेना चाहिए कि उसमें सभी आवश्यक औजार हैं अथवा नहीं। अच्छी किस्म की पेन्सिल का प्रयोग किया जाना चाहिए।

(2) प्रत्येक रेखा को बायीं से दायीं दिशा की ओर खींचना चाहिए।

(3) प्रत्येक रेखा समान मोटाई (Thickness) की होनी चाहिए। रेखा पतली खिंची होनी चाहिए।

(4) रचना के प्रत्येक पद (Step) स्पष्ट होने चाहिए। उपपत्ति (Proof) के लिए खींची रेखा बिन्दुदार (Dotted) होनी चाहिए।

(5) उत्तर-पुस्तिका को सख्त सतह पर रखना चाहिए।

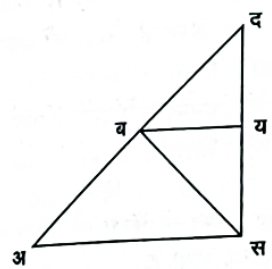
(6) परकार (Compass) को सिरे से पकड़कर चलाना चाहिए तथा उसके दोनों भाग बराबर लम्बे होने चाहिए।

(7) प्रत्येक कार्य करने पर उसको अवश्य दोहरा लेना चाहिए।

रचना कार्य में विश्लेषण (Analysis in Construction Work)

समस्या (Problem)—एक त्रिभुज की रचना करनी है जिसमें आधार = 1·2", शेष दो भुजाओं का योग = 2" और आधार के एक कोण का मान = 60° हो।

विश्लेषण (Analysis)—



माना **अ ब स** एक त्रिभुज है, जिसमें **अ ब + ब स** = 2" है। यदि **अ ब** को बढ़ायें और **ब द** को **ब स** के बराबर काटे तो **अ द = अ ब + ब स** यानी **अ ब** = 2" । अब यदि **द स** को मिला दे तो Δ **अ स द** बन जायेगा जिसमें **अ द** भुजाओं के योग के बराबर होगी।

अ स, दिये आधार (Base) के बराबर होगा।

∠**स अ द** दिये कोण के बराबर होगा।

इस तरह Δ **अ स द** की रचना की जा सकती है।

फिर ∵ **ब द = ब स**

∴ बिन्दु **ब**, **स द** के अर्द्धक पर स्थित होगा।

इस तरह निम्न रचना हुई–

(1) एक सीधी रेखा **अ स** दिये आधार के बराबर खींचो।

(2) ∠**स अ द** = 60° का बनाओ।

(3) **अ ब** रेखा को 2" के बराबर काटो।

(4) **स** और **द** को मिला दो।

(5) **अ**, **ब** रेखा **स द** की समद्विभाजक रेखा होगी जो **अ द** को **ब** पर मिलती है।

(6) **ब स** को मिला दो।

इस तरह दिये त्रिभुज **अ ब स** की रचना हो गयी। (अब इसको आसानी से सिद्ध किया जा सकता है।)

ज्यामिति का प्रामाणिक विकास

रेखा–बिन्दुओं को बिन्दुओं से मिलाने पर जो बिन्दु पथ प्राप्त होता है, उसे रेखा कहते हैं। रेखा की लम्बाई तो होती है, लेकिन चौड़ाई नहीं होती है। इस पथ पर दो बिन्दु लेकर रेखा को इन्हीं दो बिन्दुओं द्वारा निरूपित किया जाता है।

(i) (ii) (iii)

रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के दो अक्षरों से क्रम में व्यवस्थित कर नामांकित करते हैं, जैसे $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BA}$ लिखकर व्यक्त करते हैं। रेखा को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर l, m आदि अक्षरों द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है।

रेखा को बिन्दुओं के दोनों ओर अनन्त दूरी तक बढ़ाया जा सकता है।

किरण–यदि कोई रेखा विपरीत दिशाओं में अनन्त तक विस्तारित है, अर्थात् एक रेखा का कोई भी अन्त सिरा नहीं होता है, किन्तु यदि एक रेखा पर कहीं भी एक बिन्दु ले लिया जाए, तब इस बिन्दु से रेखा के दोनों ओर के भाग किरण कहलाते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

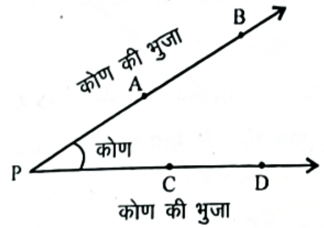
अर्थात् किरण रेखा का वह भाग है, जिसमें रेखा के एक बिन्दु से रेखा का एक अग्रसिरा होता है। चित्र में m एक रेखा है और इसके तीन दिये गये बिन्दु क्रमशः A, B और C हैं। तब m का भाग जो A से शुरू है और उसमें बिन्दु B या C है एक किरण है जिसको किरण AB या $\overrightarrow{AB}$ अथवा किरण $\overrightarrow{AC}$ या AC से लिखा जाता है। यहाँ $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AC}$ को विपरीत किरणें कहते हैं, क्योंकि बिन्दु B, A सरेख हैं तथा $\overrightarrow{AB}$ और $\overrightarrow{AC}$ का सर्वनिष्ठ बिन्दु A है। दो किरणें या दो रेखाखण्ड या एक किरण और एक रेखाखण्ड परस्पर समान्तर होते हैं, यदि वे रेखायें जिनमें ये हैं परस्पर समानान्तर हैं।

रेखाखण्ड–एक समतल में से दो बिन्दुओं को लें और इनको परस्पर मिलायें तो प्राप्त आकृति को रेखाखण्ड कहते हैं तथा यदि इस रेखाखण्ड के दोनों सिरों का अनन्त तक विस्तार कर दें तो यह एक सरल रेखा बन जाती है। अतएव एक रेखा का कोई भी भाग एक रेखाखण्ड कहलाता है। एक रेखा के अन्दर अनन्त रेखाखण्ड होते हैं।

माना l एक रेखा है जबकि AB एक रेखाखण्ड है। रेखाखण्ड AB को $\overrightarrow{AB}$ से निरूपित करते हैं। जबकि कभी-कभी रेखाखण्ड $\overrightarrow{AB}$ को AB से दर्शाया जाता है। रेखाखण्ड $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{BA}$ एक ही रेखाखण्ड को निरूपित करते हैं।

एक रेखाखण्ड के सिरों के अतिरिक्त अन्य कोई भी बिन्दु रेखाखण्ड का अन्तः बिन्दु कहलाता है।

कोण–यदि दो सरल रेखाएँ समान्तर नहीं हैं तो वे एक-दूसरे की ओर झुकी रहेंगी। वे आगे व पीछे बढ़ाने पर एक बिन्दु पर मिलेंगी। सरल रेखाओं या किरणों के इस झुकाव को कोण कहते हैं। इन सरल रेखाओं के द्वारा जो कोण बनता है, उनको कोण की भुजाएँ कहते हैं। इन रेखाओं के उभयनिष्ठ बिन्दु को कोण का शीर्ष कहते हैं।

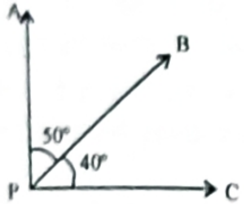


जैसे सरल रेखाओं AB तथा CD को पीछे की ओर बढ़ाने पर केवल एक बिन्दु P पर मिलती हैं। अतः बिन्दु P कोण का शीर्ष बिन्दु कहलाता है तथा AB और CD कोण की भुजाएँ कहलाती हैं।

कोण को तीन अक्षरों से लिखा जाता है। कोण का नाम लिखते समय कोण के शीर्ष बिन्दु को मध्य में लिखते हैं। जैसे $\angle APC$ या $\angle BPD$।

कोणों की माप—कोणों की आधार भुजा के ऊपर की ओर बने कोणों का मान धनात्मक होता है तथा आधार भुजा के नीचे की ओर बने कोणों का मान ऋणात्मक होता है।

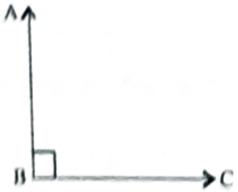
पूरक व सम्पूरक कोण—किन्हीं दो कोणों की माप का योगफल 90° हो, तो वे दोनों एक दूसरे के कोटिपूरक कोण कहलाते हैं। जैसे— 40° और 50° परस्पर एक-दूसरे के कोटि पूरक हैं।



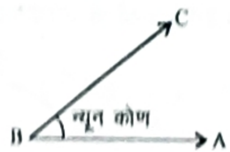
सम्पूरक कोण—किन्हीं दो कोणों की माप का योगफल 180° हो, तो ये दोनों एक-दूसरे के सम्पूरक कोण कहलाते हैं। जैसे 40° और 140° एक-दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

शून्य कोण—जब कोण बनाने वाली रेखाएँ सम्पाती हों तब उनके बीच बनने वाले कोण को शून्य कोण कहते हैं।

समकोण—यदि किसी कोण की माप 90° हो, तब उस कोण को समकोण कहते हैं। इस अवस्था में कोण बनाने वाली भुजाएँ एक-दूसरे पर लम्ब होती हैं।



न्यूनकोण—ऐसे कोण जिनकी माप 0° से अधिक तथा 90° से कम हो, तब उस कोण को न्यूनकोण कहते हैं।

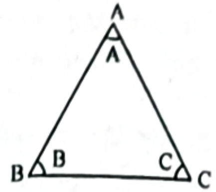


अधिककोण—ऐसे कोण जिनकी माप 90° से अधिक तथा 180° से कम हो, तब इन कोणों को अधिक कोण कहते हैं।

त्रिकोण, कोण एवं त्रिकोण के अन्तः व बाह्यकोण की अवधारणा

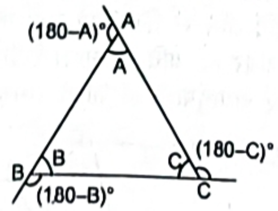
रेखाओं और कोणों के अध्ययन के पश्चात् अब हम समतल में स्थित ऐसी ज्यामितीय आकृति पर विचार करते हैं, जो दो से अधिक रेखाओं द्वारा निर्मित होती है। इनमें सबसे मुख्य आकृति त्रिकोण या त्रिभुज है।

यदि तीन बिन्दु A, B और C समरेख नहीं है, तो रेखाखण्ड AB, BC तथा CA एक त्रिभुज की रचना करते हैं।



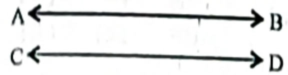
अर्थात् तीन सरल रेखाओं से घिरी हुई समतलीय आकृति को त्रिभुज कहते हैं। जिसके शीर्ष A, B और C हैं। रेखाखण्ड AB; BC और CA को त्रिकोण की भुजाएँ, $\angle BAC$, $\angle ABC$ तथा $\angle ACB$ को इसके अन्तःकोण कहते हैं। प्रत्येक त्रिकोण में तीन भुजाएँ, तीन शीर्ष तथा तीन अन्तःकोण हैं। त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग 180° होता है।

त्रिभुज के बाह्यकोण—किसी त्रिकोण या त्रिभुज के अन्तःकोण $\angle A$, $\angle B$ तथा $\angle C$ है, तब उसके बाह्यकोण $(180 - A)°$, $(180 - B)°$ तथा $(180 - C)°$ होते हैं।



सर्वांगसमता की धारणाएँ

सर्वांगसमता—हम जानते हैं कि दो सर्वांगसम रेखाखण्डों की लम्बाई समान होती है। इसके विपरीत यदि दो रेखाखण्डों की लम्बाई समान हो, तो वे सर्वांगसम होते हैं अर्थात् दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होंगे, यदि केवल यदि उनकी लम्बाइयाँ बराबर हों।



सर्वांगसमता का प्रतिबन्ध—दो रेखाखण्ड AB और CD सर्वांगसम होंगे यदि $AB = CD$।

त्रिभुज की सर्वांगसमता—हम जानते हैं कि एक त्रिभुज के तीन कोण और तीन भुजाएँ होती हैं तथा ये तीनों कोण और तीनों भुजाएँ किसी अन्य त्रिभुज के तीनों कोणों और तीनों भुजाओं के पूर्णतया बराबर हैं तो ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम त्रिभुज कहलाते हैं। व्यापक रूप में, दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर अध्यारोपित करने से उसको पूर्ण रूप से और ठीक-ठीक ढक सके।

अतः दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि और केवल यदि उनके शीर्ष बिन्दुओं में ऐसी संगतता हो, कि त्रिभुजों की संगत भुजाएँ और संगत कोण बराबर हों।

सर्वांगसमता की शर्तें—सर्वांगसमता की निम्नलिखित शर्तें होती हैं—

1. यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनका अंतरित कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की संगत दो भुजाओं और उनके अन्तरित कोण के बराबर है, तो ये दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

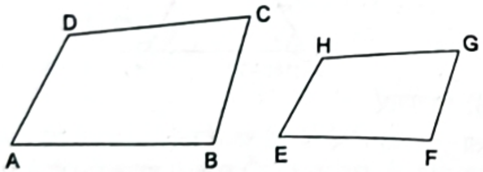
2. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अन्तरित भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और उनकी अन्तरित भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

3. यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा जो कोणों के अन्तरित न हो क्रमशः दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों और भुजा के बराबर हों, तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

4. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की क्रमशः तीन संगत भुजाओं के बराबर हैं, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

5. यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा, दूसरे समकोण त्रिभुज के क्रमशः कर्ण और संगत भुजा के बराबर हों, तो दोनों समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

समरूपता एवं समता सम्बन्धी धारणाएँ—दो सरल रेखीय आकृतियाँ समान कोणिक कहलाती हैं, यदि क्रम से लिये गये एक के कोण उसी क्रम में लिये गये दूसरे कोण के क्रमशः बराबर हों, यदि दो सरल रेखीय आकृतियाँ समान कोणिक हों और उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों तो वे समरूप कहलाती हैं।



यदि चतुर्भुज ABCD और EFGH में कोण A, B, C, D क्रमशः कोण E, F, G, H के बराबर हों और भुजाओं में $\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}$ का सम्बन्ध हो, तो दोनों चतुर्भुज समरूप कहलाते हैं।

त्रिभुज की समरूपता की शर्तें—

1. यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के अलग-अलग समानुपाती हों, तो ये दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

2. यदि दो त्रिभुज समान कोणिक हों, तो ये समरूप होते हैं।

3. यदि दो त्रिभुजों में एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो और इन कोणों को बनाने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो ये त्रिभुज समरूप होते हैं।

■■

21

पाठ-योजना
[LESSON PLANNING]

गणित के सफल शिक्षण के लिए पाठ-सूत्र तैयार करना अत्यन्त आवश्यक है। यदि अध्यापक पहले से पाठ-सूत्र तैयार कर लेता है तो वह भली-भाँति पढ़ा सकता है। इससे अध्यापक का उस दिन का विषय नियमित हो जाता है और वह फिर इधर-उधर भटकने से बच जाता है। पाठ-सूत्र पहले बनाने से उसको यह मालूम रहता है कि पढ़ाते समय अमुक समय कौन-सा प्रश्न करना है और किस स्थान पर किस शिक्षण-सामग्री का प्रयोग करना है। पाठ-योजना से अध्यापक में आत्मविश्वास बढ़ जाता है और वह बालकों के सामने विषय प्रस्तुत करने में भी सफल होता है। अतः प्रत्येक अध्यापक को पाठ पढ़ाने से एक दिन पहले पाठ-सूत्र तैयार कर लेना चाहिए।

पाठ-योजना सम्बन्धी निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए—

(1) पाठ-योजना द्वारा छात्रों में निम्न चातुर्य (Skill) पैदा करना सम्भव है—

1. प्रश्न करना (Questioning)
2. समस्या की व्याख्या करना (Defining a Problem)
3. परिकल्पना करना (Hypothesizing)
4. हल की योजना बनाना (Planning a Solution)
5. निरीक्षण करना (Observing)
6. खोज करना (Discovering)
7. विचार-विमर्श करना (Discussing)
8. नोट करना (Recording)
9. ज्ञान संगठित करना (Organizing Knowledge)
10. निष्कर्ष पर पहुँचना (Drawing Conclusions)
11. सामान्यीकरण करना (Generalizing)
12. सम्बन्धों को समझना (Understanding Relationship)
13. पूर्व ज्ञान तथा अनुभवों का प्रयोग करना (Using Previous Knowledge and Experience)
14. ज्ञान का नवीन परिस्थिति में प्रयोग करना (Applying Knowledge)।

(2) पाठ-योजना तैयार करने के कारण (Reasons of Planning a Lesson)—

1. पाठ-योजना के आधार पर पाठ्य-वस्तु (Content) को तर्कसंगत (Logical),

क्रमानुसार (Systematic), सुव्यवस्थित तथा प्रभावशाली ढंग (Organised in effective form) से रखना सम्भव होता है।

2. इसको तैयार करने में छात्रों के मानसिक विकास (Mental development) का ध्यान रखा जाता है।

3. पाठ-योजना द्वारा शिक्षण के उद्देश्यों (Objectives) की प्राप्ति तथा उपयुक्त पाठ्य-वस्तु (Content) का निर्धारण सम्भव होता है।

4. इसके द्वारा समय (Time), प्रयत्न (Effort) तथा साधनों (Resources) की बचत होती है तथा साथ-ही-साथ कम समय में अधिक ज्ञान देना भी सम्भव होता है।

5. इसके द्वारा उच्च कोटि का शिक्षण भी सम्भव है। साथ ही छात्रों की कठिनाइयों का अनुभव तथा परख की हुई सामग्री और नवीन सन्दर्भ (Reference) देने भी सम्भव है।

6. पाठ-योजना द्वारा शिक्षक के व्यक्तित्व (Personality) का भी ज्ञान होता है। इसमें शिक्षक ने किस ढंग से पाठ्य-वस्तु का संगठन (Organization), उद्देश्यों का वर्णन (Description of objectives) तथा उनको प्राप्त करने की युक्तियों का प्रयोग (Use of devices) किया है, सभी आती हैं।

7. इसके द्वारा शिक्षक को अपने ज्ञान तथा विचारों का प्रयोग करने का अवसर प्राप्त होता है, इसके आधार पर शिक्षक अपने व्यावसायिक कौशल (Professional Effectiveness) की प्रगति भी कर सकता है।

8. पाठ-योजना के द्वारा शिक्षक अपने कार्य का मूल्यांकन (Evaluation) कर सकता है। यह कार्य पाठ-समाप्ति पर उद्देश्यों की प्राप्ति के आधार पर सम्भव है।

9. पाठ-योजना द्वारा शिक्षक में आत्मविश्वास (Self-confidence), लगनशीलता (Persistence), निर्भयता (Security) तथा स्वाभिमान (Pride) आदि गुणों का विकास होता है।

10. प्रभावशाली पाठ-योजनाएँ वे कहलाती हैं जो वातावरण (Environment) के आधार पर स्वयं शिक्षक द्वारा तैयार की जाती हैं।

(3) पाठ-योजना क्या है ? (What is a Lesson-plan ?)—

1. पाठ-योजना एक लचीली (Elastic) तथा क्रमबद्ध (Systematic) योजना है जिसके द्वारा उद्देश्यों (Objectives) की प्राप्ति होती है।

2. यह उन सभी प्रतिकारकों (Variables) का समन्वय करती है जो पठन-पाठन क्रिया (Teaching-learning process) को प्रभावित करे, इसमें विद्यालय का दर्शन (Philosophy), छात्रों की प्रकृति (Nature of pupils), शिक्षा-सम्बन्धी अनुभव (Educational experiences), शिक्षक की योग्यता (Ability of teacher) तथा छात्रों का निरीक्षण (Supervision) आदि आते हैं।

3. कोई भी पाठ-योजना आदर्श (Ideal) नहीं कहलाती है, यह शिक्षक की योग्यता से सम्बन्धित होती है।

4. पाठ-योजना शिक्षक के व्यक्तिगत प्रयोग हेतु तैयार की जाती है।

5. पाठ-योजना को शिक्षक जितना उत्तम बनाना चाहता है, बना सकता है परन्तु एक उत्तम पाठ-योजना वह कहलाती है जिसमें छात्रों की मानसिक क्रिया (Mental Process) तीव्र हो तथा छात्र उसमें सक्रिय रहें।

पाठ-सूत्र तैयार करना

पाठ-सूत्र तैयार करने में सबसे पहले पढ़ाया जाने वाला विषय निर्धारित करना चाहिए। फिर बालक की अवस्था, उसके समझने की क्षमता, घण्टे की अवधि (Duration of period), पढ़ाये जाने वाले विषय तथा पढ़ाने के भाग आदि पर विचार करके पाठ-सूत्र बनाना चाहिए। आजकल पाठ-सूत्र तैयार करने की प्रथा हरबार्ट के पदों के अनुसार है। इसमें निम्नलिखित पद होते हैं—

(1) शीर्षक	(2) सामान्य उद्देश्य
(3) विशिष्ट उद्देश्य	(4) पूर्व ज्ञान
(5) सहायक सामग्री	(6) प्रस्तावना
(7) उद्देश्य-कथन	(8) प्रस्तुतीकरण
(9) नियमीकरण	(10) पुनरावृत्ति
(11) गृह-कार्य	

(1) शीर्षक—सबसे ऊपर पृष्ठ के बीच में पाठ-सूत्र संख्या लिखनी चाहिए। पृष्ठ के बायीं ओर तारीख लिखी जाती है। इसके बाद पाठ का शीर्षक लिखना चाहिए। शीर्षक इस प्रकार लिखा जाना चाहिए कि उससे बालकों को पढ़ाये जाने वाले पाठ का ठीक-ठीक अनुमान हो जाय। इसके बाद पाठशाला का नाम और फिर कक्षा, जिसे पाठ पढ़ाना है, लिखनी चाहिए। इसके बाद घण्टे की अवधि लिखते हैं।

(2) सामान्य उद्देश्य—यहाँ पर वे उद्देश्य लिखे जाते हैं जो गणित विषय के होते हैं। जैसे गणित पढ़ाने के तीन उद्देश्य हैं—व्यावहारिक, अनुशासनात्मक तथा सांस्कृतिक। अतः यही तीनों उद्देश्य यहाँ पर लिखने होते हैं।

(3) विशिष्ट उद्देश्य—इसमें वे उद्देश्य लिखे जाते हैं जो किसी पाठ-विशेष के पढ़ाने से प्राप्त होते हैं। अतः ये उद्देश्य प्रत्येक पाठ के लिए अलग-अलग होते हैं और प्रायः प्रसंग पर निर्भर करते हैं।

(4) पूर्व ज्ञान—पूर्व ज्ञान का आशय पाठ से सम्बन्धित उन बातों से है जो बालक पहले से ही जानते हैं। ये बातें उन्होंने चाहे विद्यालय में किसी पाठ में पढ़ी हों या विद्यालय के बाहर अनुभव से प्राप्त की हों। पूर्व ज्ञान के आधार पर प्रस्तावना के प्रश्न किये जाते हैं।

(5) सहायक सामग्री—पाठ पढ़ाते समय अध्यापक को जिस प्रकार की सहायक सामग्री के प्रयोग करने की आवश्यकता होती है, उस सामग्री का उल्लेख इसके अन्तर्गत किया जाता है। इस सहायक सामग्री को उस क्रम में लिखना चाहिए, जिस क्रम में उसका प्रयोग किया जाय।

(6) प्रस्तावना—अध्यापक के लिए प्रस्तावना ही सबसे प्रमुख है। प्रस्तावना द्वारा अध्यापक बालकों के मनोविकारों को अपने पाठ के अनुकूल बना लेता है। बालकों के पूर्व ज्ञान और नवीन पाठ में सम्बन्ध जोड़ने के लिए अध्यापक पूर्व ज्ञान के आधार पर प्रश्न पूछता है। इस प्रकार इन प्रश्नों द्वारा बालकों के पूर्व ज्ञान और नवीन पाठ में सम्बन्ध जोड़ता है। ये प्रश्न इस प्रकार के होने चाहिए कि बालक को नवीन पाठ पढ़ाने के लिए रुचि और उत्साह बढ़े। प्रस्तावना में सात-आठ मिनट से अधिक समय न लगाना चाहिए।

(7) **उद्देश्य-कथन**—प्रस्तावना समाप्त होने पर उद्देश्य-कथन किया जाता है। इस समय बालकों को नवीन पाठ का आभास मिल जाता है। उद्देश्य-कथन इस प्रकार करना चाहिए कि बालकों को यह मालूम हो जाय कि जो समस्या उनके मस्तिष्क को उद्विग्न कर रही है, उसका हल इस नवीन पाठ को पढ़ाने से मिलेगा। यह संक्षिप्त, निश्चित और आकर्षक होना चाहिए।

(8) **प्रस्तुतीकरण**—इसके लिए पृष्ठ को दो भागों में विभाजित कर लेते हैं। पहले भाग में पाठ्य-वस्तु को स्पष्ट एवं व्यवस्थित रूप से लिखते हैं। दूसरे भाग में पढ़ाने की विधि लिखी जाती है। यदि पढ़ाते समय सहायक सामग्री प्रयोग करनी होती है तो उसका ही उल्लेख इसमें किया जाता है। पाठ्य-विषय के विभिन्न भागों में सम्बन्ध आदि पाठ का पूर्व ज्ञान इसी अवस्था में कराया जाता है। अतः अध्यापक को पाठ्य-विषय बड़े सोच-समझकर रोचक ढंग से प्रस्तुत करना चाहिए। प्रस्तुतीकरण में जल्दी कभी भी नहीं करनी चाहिए।

(9) **नियमीकरण**—इस अवस्था में अध्यापक प्रस्तुतीकरण में पढ़ाये गये तथ्यों में तुलना करके निष्कर्ष, सिद्धान्त आदि निकलवाता है। नियमीकरण में अध्यापक को कुशलतापूर्वक ऐसे प्रश्न करने चाहिए, कि बालक नियम या सिद्धान्त को स्वयं निकाले। अध्यापक को नियम बताने की आवश्यकता न पड़ने पाये।

(10) **पुनरावृत्ति**—पाठ समाप्त होने पर अध्यापक को बालकों से ऐसे प्रश्न पूछने चाहिए जिससे यह ज्ञात हो जाय कि बालकों ने पाठ भली-भाँति समझ लिया है या नहीं। प्रश्न इस प्रकार के पूछे जाने चाहिए जिससे समस्त पाठ दोहराया जा सके और बालकों को पढ़ाते समय यदि कोई शंका रही हो तो उसका भी समाधान हो जाय।

(11) **गृह-कार्य**—अन्त में पाठ से सम्बन्धित कुछ कार्य बालकों को घर पर करने के लिए दे दिया जाता है। गृह-कार्य अभ्यास के लिए परम आवश्यक है परन्तु गृह-कार्य देते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि गणित में पढ़ाये गये पाठ पर सरल, फिर कठिन सब प्रकार के प्रश्नों का उसमें समावेश हो और गृह-कार्य इतना ज्यादा न हो कि बालक उसे घर पर न कर सकें। गृह-कार्य की अगले दिन जाँच भी होनी चाहिए।

पाठ-सूत्र के सम्बन्ध में आवश्यक बात यह है कि अध्यापक को अपना पाठ नियत समय में ही समाप्त करने का भरसक प्रयत्न करना चाहिए, न तो ऐसा होना चाहिए कि घण्टा समाप्त होने से पहले ही पाठ समाप्त हो जाय और न ऐसा ही होना चाहिए कि घण्टा समाप्त हो जाय परन्तु पाठ समाप्त न हो। जहाँ तक सम्भव हो, पाठ बिल्कुल ठीक घण्टे के साथ समाप्त होना चाहिए।

पाठ-योजना का नवीन दृष्टिकोण

नवीन दृष्टिकोण के आधार पर पाठ-योजना में निम्न पद होते हैं :

(क) **शीर्षक**—उप-विषय लिखा जाता है।

(ख) **उद्देश्य**—उप-विषय सम्बन्धी उद्देश्य (Objectives) लिखे जाते हैं।

(ग) **शिक्षण-बिन्दु** (Teaching points)—उप-विषय में जो भी पद, प्रत्यय, सम्बन्ध, प्रक्रियाएँ, सिद्धान्त, संकेत तथा कल्पनायें हों, उनको लिखा जाता है।

(घ) **पूर्व ज्ञान** (Previous knowledge)।

(ङ) **सहायक सामग्री** (Material aid)।

शिक्षण विधियाँ (Methods of Teaching)

(1) प्रदर्शन विधि (Demonstration Method),

(2) विश्लेषण विधि (Analytical Method),

(3) प्रश्नोत्तर विधि (Question-Answer Method)।

उपर्युक्त में जिन विधियों का प्रयोग किया जाता है उनका उल्लेख करें।

प्रस्तावना	शिक्षक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ

उद्देश्य कथन (Statement of Aim)

कक्षा कार्य

उद्देश्य तथा शिक्षण बिन्दु (Objectives and Teaching Points)	शिक्षक क्रियाएँ (Teachers Activities)	छात्र क्रियाएँ (Pupils Activities)	श्यामपट्ट कार्य (Black-Board Work)

पाठ-सूत्र 1

दिनांक.................... कक्षा–8 ब अन्तर

समय–40 मिनट विद्यालय....................

विषय–गणित

उपविषय–बीजगणित : युगपत् समीकरण (Simultaneous Equations)

उद्देश्य (Objectives)–	1. छात्रों को युगपत् समीकरण का ज्ञान देना। 2. छात्रों को व्यावहारिक जीवन में आने वाली समस्याओं में ज्ञान का अनुप्रयोग (Application) करना सिखाना।
शिक्षण बिन्दु (Teaching points)–	
पद (Terms)–	समीकरण, ज्ञात तथा अज्ञात राशि, पक्षान्तर।
संकेत (Symbol)–	(1), (2),—
प्रत्यय (Concept)–	1. अज्ञात राशि बराबर के चिन्ह के बायीं ओर तथा ज्ञात राशि दायीं ओर लिखते हैं। 2. समीकरण के पदों को किसी राशि से गुणा करने पर मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
प्रक्रियायें (Processes)–	1. दो राशियों में एक राशि को दोनों समीकरणों में बराबर करके दूसरी का मान ज्ञात करते हैं। 2. एक राशि का मान ज्ञात होने पर मान को उस राशि के स्थान पर रखकर दूसरी अज्ञात राशि का मान ज्ञात किया जाता है।
पूर्व बोध–	छात्र निम्न प्रकार के युगपत् समीकरण के प्रश्नों की प्रक्रिया से परिचित हैं– 2क + 2ख = 12 3क – 2ख = 6

अध्यापक क्रिया	छात्रों की क्रिया
1. महेश के पास य रुपये थे, परन्तु उसने 5 रुपये दिनेश को दिये, तो महेश के पास कितने रुपये रह गये ?	(य – 5) रुपये
2. यदि निदेश के पास पहले र रुपये थे, तो 5 रुपये मिलने पर अब उसके पास कुल कितने रुपये हो गये ?	(र + 5) रुपये
3. (य – 5) रुपये के दोगुने कितने हुए ?	2 (य – 5) या 2 य – 10
4. यदि (य – 5) का दोगुना, (र + 5) के बराबर हो, तो इसे समीकरण में किस प्रकार लिखेंगे ?	2 य – 10 = र + 5

उपस्थापन– पीछे बैठे हुए किसी छात्र से फोल्डर पर लिखे हुए निम्नांकित प्रश्न पढ़वाकर उसका विश्लेषण करना।

आदर्श प्रश्न– राम ने श्याम से कहा, "यदि तुम मुझे 6 रुपये दे दो, तो तुम्हारे पास जो रुपये बचेंगे, उनके दोगुने मेरे पास हो जायेंगे।" श्याम ने उत्तर दिया, "यदि तुम मुझे केवल 2 रुपये दे सको तो तुम्हारे पास जो रुपये बचेंगे, उसके दोगुने मेरे पास हो जायेंगे।" बताओ कि दोनों के पास अलग-अलग कितने रुपये थे ?

विश्लेषण–

अध्यापक क्रिया	छात्रों की क्रिया
1. इस प्रश्न में क्या-क्या बातें ज्ञात हैं ?	1. छात्रों से स्वाभाविक उत्तर प्राप्त करते हुये निम्नांकित पूर्णरूप में निकलवाकर उसे श्याम पटांकित करना– 2 (श्याम के रुपये – 6) = राम के रुपये + 6...(1) 2 (राम के रुपये – 2) = श्याम के रुपये + 2

2. क्या ज्ञात करना है ?	2. दोनों (राम व श्याम) के पास अलग-अलग कितने रुपये थे ?
3. प्रत्येक के रुपयों की संख्या कब निश्चित हो सकती है ?	3. जबकि प्रत्येक के रुपयों के लिए अलग-अलग अज्ञात राशि मानें।
4. दो अज्ञात राशियों के मान कब ज्ञात कर सकते हैं ?	4. जब प्रश्नों में वे दो शर्तें दी हों, जिनसे दो समीकरण बन सकें।
5. वे शर्तें कैसी होनी चाहिए ?	5. वे ऐसी हों जो दोनों ओर बराबर-बराबर मान रखती हों ताकि उनसे दो समीकरण बन सकें।

(तराजू की सन्तुलन-क्रिया का उदाहरण प्रस्तुत किया जा सकता है।) परन्तु ये शर्तें यहाँ दी हुई (ज्ञात) हैं। अध्यापक निम्नांकित प्रश्नों के आधार पर संश्लेषण विधि द्वारा तब तक उत्तर निकलवाते हुए श्यामपट्ट पर उन्हें लिखेगा जब तक कि पूरे प्रश्न को वर्गीकरण का पूर्णरूप न मिल जाय।

संश्लेषण—
रुपये

1. श्याम और राम के रुपयों की अलग-अलग संख्या क्या-क्या मानें ?	1. माना राम के पास र रुपये थे और श्याम के पास य रुपये थे (जो छात्र कहें वही मानेंगे।)
2. 6 रुपये देने के बाद श्याम के पास कितने रुपये बचे ?	2. (य − 6) रुपये।
3. 6 रुपये मिलने पर राम के पास कितने रुपये हो गये ?	3. (र + 6) रुपये।
4. श्याम के पास बचे हुये रुपयों का दोगुना क्या हुआ ?	4. 2 (य − 6) रुपये। या 2 य − 12 रुपये।
5. प्रश्नानुसार— 2य − 12 किसके बराबर है ?	5. प्रश्नानुसार— 2य − 12 = र + 6 ...(1) या 2य − र = 18 ...(1)
6. य और र को एक ओर (पक्षान्तरित) करने पर इस समीकरण को कैसे लिखें ?	6. र दोनों ओर घटाकर और 12 को जोड़कर पक्षान्तर से।
7. 2 रुपये देने पर राम के पास क्या शेष रहा ?	7. (र − 2) रुपये।
8. 2 रुपये मिलने पर श्याम के पास कितने रुपये हो गये ?	8. (य + 2) रुपये।
9. राम के शेष रुपयों का दोगुना क्या हुआ ?	9. 2 (र − 2) रुपये या 2र − 4 रुपये।
10. प्रश्नानुसार— 2र − 4 किसके बराबर है ?	10. 2र − 4 = य + 2 ...(2)
11. पक्षान्तर से क्या फल प्राप्त होगा ?	11. 2र − य = 6 ...(2)
12. समीकरण (1) की भाँति य और र के क्रम से इस समीकरण को कैसे लिखें ?	12. − य + 2 र = 6 ...(2)

नोट—छात्र उक्त दो समीकरणों को स्वयं सरल करेंगे तथा अध्यापक कक्षा में निरीक्षण कार्य करेगा। आवश्यकता पर सहायता दी जायगी। निर्दिष्ट संश्लेषण-विधि से छात्रों द्वारा दिये हुये उत्तरों की सहायता लेते हुये श्यामपट्ट पर निम्नांकित समीकरणिक प्रक्रिया की जायेगी—

आदर्श-प्रक्रिया—

माना राम के पास र रुपये थे और श्याम के पास य रुपये थे।

6 रुपये देने पर श्याम के पास बचे = (य − 6) रुपये

6 रुपये मिलने पर राम के पास हुये = (र + 6) रुपये

(य − 6) रुपये का दोगुना = 2 (य − 6) या 2य − 12 रुपये

प्रश्नानुसार— 2य − 12 = र + 6 ...(1)

या 2य − र = 18 (पक्षान्तर से) ...(1)

2 रुपये देने पर राम के पास शेष रुपये = र − 2

2 रुपये मिलने पर श्याम के पास रुपये हुये = य + 2

प्रश्न की दूसरी शर्त के अनुसार,

$$2(\text{र} - 2) = \text{य} + 2 \qquad ...(2)$$

$$-\text{य} + 2\text{र} = 6 \qquad ...(2)$$

या

$$-2\text{य} + 4\text{र} = 12 \qquad \text{[समीकरण (2) का दोगुना]}$$

$$2\text{य} - \text{र} = 18 \qquad ...(1)$$

$$3\,\text{र} = 30 \qquad \text{[समीकरण (1) + समीकरण (2)]}$$

$$\text{र} = 10$$

∴ राम के पास थे = 10 रुपये **उत्तर**

∴ $2\text{य} - 10 = 18$ [र का मूल्य समीकरण (1) में रखने से]

$$2\text{य} = 28$$

$$\text{य} = 14$$

∴ श्याम के पास थे = 14 रुपये **उत्तर**

छात्रों द्वारा उत्तरों का परीक्षण प्रश्नानुसार शीघ्रता तथा सरलता एवं स्वाभाविकता से करवाया जायगा ताकि उन्हें आत्मविश्वास हो जाये और समीकरण की सत्यता भी सिद्ध हो जाय।

उक्त प्रश्नोपरान्त छात्र फोल्डर पर लिखे हुए निम्नलिखित अभ्यासार्थ प्रश्नों को स्वयं हल करेंगे। इनकी प्रक्रिया के लिए उन्हें लगभग 12 मिनट का समय रहेगा, परन्तु पूरे प्रश्न यदि छात्र कक्षा में हल न कर सकें, तो वे शेष प्रश्न गृह-कार्य में हल करेंगे।

अभ्यासार्थ प्रश्न—

1. यदि रमेश, कवीन्द्र को 2 सन्तरे दे देगा, तो कवीन्द्र और रमेश के पास बराबर-बराबर सन्तरे हो जायेंगे। परन्तु यदि कवीन्द्र रमेश को 2 सन्तरे दे देगा, तो रमेश के पास कवीन्द्र के शेष सन्तरों के तीन-गुने सन्तरे हो जायेंगे। दोनों के पास अलग-अलग कितने सन्तरे थे? *[**उत्तर**—रमेश के पास = 10 सन्तरे और कवीन्द्र के पास = 6 सन्तरे]*
2. *यदि आम के पेड़ से 5 चिड़ियाँ, पीपल के पेड़ पर चली जायें, तो उस पर उतनी चिड़ियाँ हो जायेंगी जितनी पहले आम के पेड़ पर थीं। यदि पीपल के पेड़ से 5 चिड़ियाँ आम के पेड़ पर आ जायें, तो इसमें पीपल के पेड़ की शेष चिड़ियों की दोगुनी चिड़ियाँ आम के पेड़ पर हो जायेंगी। आम और पीपल के पेड़ों पर अलग-अलग कितनी चिड़ियाँ थीं? [**उत्तर**—आम के पेड़ पर = 25 चिड़ियाँ, पीपल पर = 20 चिड़ियाँ]*

पाठ-सूत्र 2

विषय—गणित | **उपविषय**—अंकगणित | **शीर्षक**—ऐकिक नियम

कक्षा—6 ब | **अन्तर**.................... | **समय**—40 मिनट

उद्देश्य (Objectives)—
1. छात्रों को ऐकिक नियम सम्बन्धी कठिन प्रश्न हल करने का ज्ञान देना।
2. छात्रों के इस ज्ञान का जीवन से सम्बन्धित समस्याओं में अनुप्रयोग (Application) करना।

शिक्षण-बिन्दु (Teaching Points)—

पद (Terms)— चूँकि, इसलिए, बराबर,

संकेत (Symbols)— ∵, ∴, =

प्रत्यय (Concept)— एक का मान ज्ञात होने पर अधिक का मान ज्ञात करने के लिए गुणा तथा अधिक के मान से एक का मान ज्ञात करने को भाग किया जाता है।

प्रक्रिया (Process)— एक या अधिक का मान ज्ञात करना

पूर्व-ज्ञान— छात्र ऐकिक नियम के साधारण प्रश्न हल कर लेते हैं।

अध्यापक क्रिया	छात्रों की क्रिया
1. घरों में खर्च की हुई बिजली का पता किस वस्तु के मीटर द्वारा चलता है।	1. घरों में खर्च की हुई बिजली का पता बिजली के द्वारा चलता है ?
2. मीटर द्वारा खर्च हुई बिजली की कुल मात्रा का पता कैसे लगता है ?	2. मीटर में लगी हुई सुई, बिजली की खर्च हुई यूनिट को बता देती है।
3. यदि एक मकान में 1 दिन में 2 यूनिट बिजली खर्च होती हो तो 30 दिन में कितने यूनिट बिजली खर्च होगी ?	3. 30 दिन में 60 यूनिट बिजली खर्च होगी।
4. यदि बिजली की एक यूनिट का खर्च 25 पैसे हो तो 60 यूनिट का खर्च कितना होगा ?	4. 60 यूनिट बिजली का खर्च 15 रुपये होगा।

आदर्श प्रश्न– एक बिजली का पंखा 7 जुलाई, 1958 से 19 सितम्बर, 1958 तक 5 घण्टे प्रतिदिन चलाया गया। यदि एक घण्टा में 2 यूनिट बिजली खर्च हुई हो और एक यूनिट का खर्च 25 पैसे हो तो कुल कितना खर्च देना पड़ा होगा ?

विश्लेषण–

अध्यापक क्रिया	छात्रों की क्रिया
1. क्या दिया हुआ है ?	1. दिया है– (क) पंखा 7 जुलाई, 1958 से 19 सितम्बर, 1958 तक चला। (ख) पंखा प्रतिदिन 5 घण्टे चला। (ग) एक घण्टे में 2 यूनिट बिजली खर्च होती है। (घ) एक यूनिट का खर्च 25 पैसे है।
2. क्या ज्ञात करना है ?	2. ज्ञात करना है कि बिजली का कुल कितना खर्च देना पड़ा होगा।
3. पंखा चलाने में बिजली के लिए कुल खर्च कब ज्ञात हो सकता है ?	3. (क) यदि ज्ञात हो कि कुल कितनी यूनिट बिजली खर्च हुई ? (ख) और एक यूनिट में कितना धन खर्च होता है ? (अध्यापक संकेत कर देगा कि एक यूनिट का खर्च ज्ञात है ?)
4. कुल यूनिट बिजली जो खर्च हुई, कब ज्ञात हो सकती है ?	4. (क) यदि ज्ञात हो कि पंखा कुल कितने घण्टे चला ? (ख) और एक घण्टा में कितने यूनिट बिजली खर्च होती है ? *(अध्यापक संकेत कर देगा कि 1 घण्टे में कितने यूनिट बिजली खर्च होती है, हमें ज्ञात है।)*
5. पंखा कुल कितने घण्टे चला, यह कब ज्ञात हो सकता है ?	5. (क) यदि ज्ञात हो कि पंखा कब चलना प्रारम्भ हुआ और कब बन्द किया गया। (ख) और यह भी ज्ञात हो कि पंखा प्रतिदिन कितने घण्टे चलाया गया। (अध्यापक संकेत कर देगा कि पंखा चलाने और बन्द करने का समय तथा पंखा प्रतिदिन कितने घण्टे चलाया गया, ज्ञात है।)

संश्लेषण–

अध्यापक क्रिया	छात्रों की क्रिया
1. पंखा कब चलाया गया ?	1. पंखा 7 जुलाई, 1958 को चलाया गया।
2. पंखा कब बन्द किया गया ?	2. पंखा 19 सितम्बर, 1958 को बन्द किया गया।
3. पंखा कुल कितने दिन चला ?	3. पंखा कुल 75 दिन चला।
4. पंखा एक दिन में कितने घण्टे चला ?	4. पंखा एक दिन में 5 घण्टे चला।
5. पंखा 74 दिन में कितने घण्टे चला होगा ?	5. पंखा 75 दिन में $(75 \times 5) = 375$ घण्टे चला होगा।
6. एक घण्टे में कितनी यूनिट बिजली खर्च होती है ?	6. एक घण्टे में 2 यूनिट बिजली खर्च होती है।
7. 375 घण्टे में कितनी यूनिट बिजली खर्च हुई होगी ?	7. 375 घण्टे में कुल $(375 \times 2) = 750$ यूनिट बिजली खर्च हुई होगी।
8. एक यूनिट बिजली पर कितना धन खर्च होता है ?	8. एक यूनिट बिजली पर 25 पैसे खर्च होता है।
9. 750 यूनिट बिजली पर कितना धन खर्च हुआ होगा।	9. 750 यूनिट पर $= 750 \times \frac{25}{100} = 187.50$ रुपये खर्च हुआ होगा।

आदर्श हल—

पंखा 7 जुलाई, 1958 को चलाया गया।
पंखा 19 सितम्बर, 1958 को बन्द किया गया।
पंखा कुल 75 दिन तक चलाया गया।
$\because$ पंखा 1 दिन में 5 घण्टे चला।
$\therefore$ पंखा 75 दिन में (75×5) घण्टे $=$ 375 घण्टे चला।
$\because$ 1 घण्टा में 2 यूनिट बिजली खर्च होती है।
$\therefore$ 375 घण्टों में (375×2) यूनिट $=$ 750 यूनिट बिजली खर्च हुई।
$\because$ 1 यूनिट का खर्च $\frac{25}{100}$ रुपया है।
$\therefore$ 750 यूनिट का खर्च $\left(750 \times \frac{25}{100}\right)$ रुपये $= \frac{375}{2}$ रुपये
$= 187{\cdot}50$ रुपये हुआ।

अभ्यासार्थ प्रश्न—

1. किसी कारखाने में प्रतिदिन 24 यूनिट बिजली खर्च होती है। 1 जनवरी 1959 से 31 मार्च, 1959 तक के लिए बिजली का कुल कितना व्यय देना पड़ेगा जबकि एक यूनिट बिजली का खर्च 28 पैसे हो ? [उत्तर = 20 रुपये 16 पैसे]
2. एक होटल का रेडियो 6 घण्टे प्रतिदिन काम में लाया जाता है। यदि एक घण्टे में 5 यूनिट बिजली खर्च होती हो और एक यूनिट बिजली का खर्च 28 पैसे हो तो अक्टूबर, नवम्बर और दिसम्बर, 1958 में खर्च हुई बिजली के लिए होटल के मालिक को कितना खर्च देना पड़ा होगा ? [उत्तर = 72 रुपये 80 पैसे]

गृह-कार्य—

यदि तुम्हारे विद्यालय में प्रति घण्टा 5 यूनिट बिजली पंखों के लिए खर्च होती है तो 9 जुलाई से 20 सितम्बर और 16 मार्च से 30 अप्रैल तक बिजली का कुल कितना खर्च देना पड़ेगा जबकि पंखे प्रतिदिन 6 घण्टे चलाये जाते हैं और एक यूनिट का खर्च 27 पैसे हो ? [उत्तर = 96 रुपये 30 पैसे]

पाठ-सूत्र 3

विद्यालय..................
दिनांक..................
विषय—गणित
उपविषय—समान परिमाप के वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफल में अन्तर।

कक्षा—8
कालांश..................
समय—35 मिनट

Objectives—

(a) Knowledge— 1. छात्र प्रत्यास्मरण कर सकेंगे कि समान परिमाप के वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफल में सदैव अन्तर होता है।

(b) Understanding— 2. छात्र विभिन्न उदाहरण देकर उपर्युक्त तथ्य को स्पष्ट कर सकेंगे।

(c) Application— 3. छात्र उपर्युक्त तथ्य का उपयोग गणितीय प्रश्नों को हल करने में कर सकेंगे।
4. छात्र उपर्युक्त तथ्य के आधार पर संख्यात्मक प्रश्नों का निर्माण कर सकेंगे।

(d) Skill— 5. छात्र वर्ग एवं वृत्त का स्वच्छ चित्र बना सकेंगे।

Teaching Points—

(a) Terms— क्षेत्रफल, वर्ग का क्षेत्रफल, वृत्त का क्षेत्रफल, परिमाप।

(b) Fact— वृत्त तथा वर्ग का परिमाप समान होते हुए भी क्षेत्रफलों में हमेशा अन्तर रहता है।

(c) Formula— वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^2
वर्ग का क्षेत्रफल $=$ (वर्ग की एक भुजा की लम्बाई)^2
π (पाई) का मान $= 22/7$

Teaching Aids—
1. कक्षा, श्यामपट्ट, चॉक, डस्टर, पॉइण्टर लपेट श्यामपट्ट।
2. गत्ते का बना हुआ 7 सेण्टीमीटर त्रिज्या का वृत्त, एक मीटर कनेक्शन वायर, गत्ते का बना हुआ 11 सेण्टीमीटर भुजा वाला एक वर्ग, पैमाना।

Previous Knowledge—

1. छात्र परिमाप का अर्थ समझते हैं।
2. छात्र वृत्त का क्षेत्रफल एवं परिमाप सूत्र निकालना जानते हैं।
3. छात्र वर्ग का क्षेत्रफल एवं परिमाप सूत्र से निकालना जानते हैं।

Introduction—

Pupil Teacher's Activities	Student's Activities
1. परिमाप किसे कहते हैं।	किसी आकृति की बाह्य भुजाओं की लम्बाई को उस आकृति की परिमाप कहते हैं।
2. एक आयत की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 3 सेमी तथा 2 सेमी है। आयत का परिमाप बताओ।	**हल :** आयत का परिमाप $= 2 \times$ (ल० + चौ०) $= 2 \times (3 + 2)$ सेमी $= 2 \times 5$ सेमी $= 10$ सेमी
3. वृत्त की परिमाप तथा उसकी परिधि में क्या सम्बन्ध होता है ?	वृत्त की परिधि को ही वृत्त की परिमाप कहते हैं।
4. वृत्त की परिधि तथा व्यास में क्या सम्बन्ध होता है ?	परिधि तथा व्यास का अनुपात π (पाई) के बराबर होता है।
5. यदि समान परिमाप के एक वृत्त तथा वर्ग दिये हुये हैं, तो बताओ उनके क्षेत्रफलों में क्या सम्बन्ध होगा ?	

Statement of Aims—

समान परिमाप के वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफलों में हमेशा अन्तर होता है।
आज हम इसी तथ्य का सत्यापन आदर्श प्रश्न की मदद से करेंगे।

विषय-प्रवेश—

छात्र-अध्यापक फोल्डर पर लिखे हुये प्रश्न को प्रस्तुत करने के बाद दो विद्यार्थियों से पढ़वायेगा।

आदर्श प्रश्न—

एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है, की परिमाप (परिधि) बताओ। यदि इस वृत्त की परिमाप एक वर्ग के बराबर हो तो उस वर्ग की भुजा की लम्बाई बताओ। इस वृत्त तथा वर्ग के क्षेत्रफल में अन्तर भी ज्ञात करो।

Class Work—

Pupil Teacher's Activities	Student's Activities
1. आदर्श प्रश्न में क्या दिया हुआ है ?	एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 7 सेण्टीमीटर है।
2. प्रश्नानुसार क्या-क्या ज्ञात करना है ?	(i) 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि (परिमाप)। (ii) इस वृत्त की परिमाप के बराबर परिमाप के वर्ग की एक भुजा। (iii) वृत्त तथा वर्ग दोनों के क्षेत्रफल।
3. प्रश्न में वर्ग की परिमाप किस राशि के बराबर है ?	दिये गये वृत्त की परिमाप के।
4. दिये हुये वृत्त की त्रिज्या कितनी है ?	7 सेण्टीमीटर।
5. वृत्त की परिधि ज्ञात करने का सूत्र क्या है ?	वृत्त की परिधि $= \pi \times$ वृत्त का व्यास $= \pi \times 2 \times$ त्रिज्या $= 2\pi \times$ त्रिज्या
6. इस सूत्र में वृत्त की त्रिज्या का मान 7 सेमी रखने पर वृत्त की परिधि कितनी होगी ? (गत्ते के बने 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के चारों ओर तार लपेट कर उसकी लम्बाई एक छात्र से नपवाते हुए।)	वृत्त की परिधि $= 2 \times \pi \times 7$ सेमी $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$ सेमी **= 44 सेमी**
7. इस तार की लम्बाई कितनी है ?	44 सेण्टीमीटर

Pupil Teacher's Activities	Student's Activities
कथन—इस प्रयोग से सिद्ध हुआ कि 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि 44 सेमी ही होगी।	
8. प्रश्नानुसार, ∵ दिये गये वृत्त की परिधि = अज्ञात वर्ग की परिमाप तो अज्ञात वर्ग की परिमाप बताओ।	44 सेण्टीमीटर
9. किसी वर्ग की परिमाप ज्ञात करने का क्या सूत्र है ?	वर्ग की परिमाप = वर्ग की चारो भुजाओं का योग = 4 × वर्ग की एक भुजा की लम्बाई
10. वर्ग की परिमाप ज्ञात है तो वर्ग की एक भुजा की लम्बाई कितनी होगी ? (44 सेमी वृत्ताकार में मुड़े तार को लेकर 4 बराबर-बराबर भागों मे मोड़कर)	वर्ग की परिमाप = 4 × एक भुजा की ल० या 44 सेमी = 4 × एक भुजा की ल० या $\frac{44}{4}$ सेमी = एक भुजा या **11 सेमी = एक भुजा**
11. पूरे तार की लम्बाई 44 सेमी थी। इसे चार बराबर-बराबर भागों मे मोड़ने पर प्रत्येक भाग की लम्बाई कितनी होगी ? (चार बराबर भागों में मुड़े तार को वर्गाकार आकृति में बदलकर, गत्ते के वर्ग, जिसकी परिमाप 44 सेमी है, के ऊपर रखकर छात्रों को दिखाते हुये)	11 सेण्टीमीटर।
12. अतः बताओ इस वर्ग की प्रत्येक भुजा की लम्बाई कितनी होगी ?	11 सेण्टीमीटर।

Pupil Teacher's Activities	Student's Activities
13. बताओ, 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त एवं 11 सेमी भुजा वाले वर्ग की परिमापो में क्या सम्बन्ध हुआ ?	दोनों की परिमाप समान है।
14. वृत्त के क्षेत्रफल का क्या सूत्र है ?	वृत्त का क्षेत्रफल = π × (वृत्त की त्रिज्या)
15. 7 सेमी त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल बताओ ।	$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ वर्ग सेमी = 22 × 7 वर्ग सेमी **= 154 वर्ग सेमी**
16. वर्ग के क्षेत्रफल का सूत्र बताओ।	वर्ग का क्षेत्रफल = (वर्ग की एक भुजा)^2
17. 11 सेमी लम्बाई की भुजा के **वर्ग का क्षेत्रफल** निकालो।	वर्ग का क्षेत्रफल = $(11)^2$ वर्ग सेमी = 11 × 11 वर्ग सेमी **= 121 वर्ग सेमी**
18. समान परिमाप वाले वृत्त एवं वर्ग के क्षेत्रफलों में किसका क्षेत्रफल अधिक है ?	वृत्त का क्षेत्रफल अधिक है।
19. दोनों के क्षेत्रफलों में कितना अन्तर है ? **कथन**—इसका निष्कर्ष हुआ कि "समान परिमाप के वृत्त तथा वर्ग में दोनों के क्षेत्रफलों में हमेशा अन्तर रहता है।"	अन्तर (क्षेत्रफलों में) = वृत्त का क्षेत्रफल – वर्ग का क्षेत्रफल = 154 – 121 वर्ग सेमी **= 33 वर्ग सेमी**

गृह कार्य—

पाठ-सूत्र 4

School ....
Date ....
Subject–Mathematics (Geometry)
Tipic—Theorem—"There angles of a triangle are together equal to two right angles."

Class VII
Period ....
Time– 40 M

Objectives—	
1. Knowledge—	छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे प्रमेय "त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण होता है" का प्रत्यास्मरण कर सकें।
2. Understanding—	छात्रों को इस योग्य बनाना कि दी गयी प्रमेय का विश्लेषण कर उसका सत्यापन कर सकें।
Previous Knowledge—	छात्र कोणों के भेदों (kinds of angles), उनके नापने एवं त्रिभुज की आकृति से परिचित हैं।

Introduction—

Teacher's Activities	Student's Activities
1. यदि AB सरल रेखा के किसी बिन्दु C से एक रेखा CD खींची जाय तो इस प्रकार कितने कोण प्राप्त होंगे (चित्रानुसार)।	दो कोण प्राप्त होंगे— $\angle$DCB और $\angle$DCA
2. $\angle$DCB और $\angle$DCA का योग कितना होगा ?	दो समकोण या 180°।
3. (चित्रानुसार) : यदि बिन्दु C से AB के समान्तर रेखा CD खींची जाय तो $\angle$BAC और $\angle$DCA में क्या सम्बन्ध होगा ?	$\angle$BAC = $\angle$DCA (एकान्तर कोण)।
4. $\angle$ABC और $\angle$DCB में क्या सम्बन्ध होगा ?	$\angle$ABC = $\angle$DCA (संगत कोण)।
5. $\angle$ABC, $\angle$BCA और $\angle$BAC में क्या सम्बन्ध है ?	?

Statement of Aim— आज हम प्रमेय "त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण होता है" का अध्ययन करेंगे।

Analysis—

Teacher's Activities	Student's Activities
1. इस प्रमेय में क्या सिद्ध करना है ?	त्रिभुज के तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण या 180° होता है।
2. इसे सिद्ध करने के लिए क्या-क्या ज्ञात है ?	एक त्रिभुज ABC ज्ञात है जिसके अन्तःकोण क्रमशः $\angle$ABC, $\angle$BCA और $\angle$BAC हैं।
3. इन तीनों अन्तःकोणों का योग दो समकोण के बराबर कब हो सकता है ? अर्थात् $\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180°$ कब सम्भव है ?	जबकि इन तीनों कोणों को एक सरल कोण (straight angle) के बराबर सिद्ध कर दिया जाय।
4. $\angle$ABC, $\angle$BCA और $\angle$BAC को एक सरल कोण के रूप में किस प्रकार रखा जा सकता है ?	जबकि इसके किसी एक कोण पर शेष दो कोणों के बराबर कोण बना दिये जायें।
5. यह कोण बिन्दु C पर किस प्रकार बनाये जा सकते हैं ?	यदि बिन्दु C से AB के समान्तर रेखा CE खींच दी जाय।

Synthesis—

(बिन्दु C से AB के समान्तर रेखा CE खींचने पर)	
1. $\angle$BAC और $\angle$ACE कैसे कोण हैं ?	एकान्तर कोण हैं।
2. $\angle$BAC और $\angle$ACE में क्या सम्बन्ध है ?	$\angle$BAC = $\angle$ACE
3. $\angle$ABC और $\angle$ECD कैसे कोण हैं ?	संगत कोण हैं।

Teacher's Activities	Student's Activities
4. $\angle ABC$ और $\angle ECD$ में क्या सम्बन्ध है ?	$\angle ABC = \angle ECD$
5. $\angle ABC$ और $\angle BAC$ का योग कौन-कौन से दो कोणों के योग के बराबर है ?	$\angle ACE$ और $\angle ECD$ के योग के बराबर है।
6. यदि $\angle ABC$ और $\angle BAC$ के योग में $\angle BCA$ को जोड़ दिया जाय तो कोणों के योग कौन-कौन से कोणों के योग के बराबर होगा ?	$\angle ACE$, $\angle ECD$ और $\angle BAC$ के योगफल के बराबर होगा।
7. $\angle ABC$, $\angle BAC$ और $\angle BCA$ कैसे कोण हैं ?	ये तीनों त्रिभुज के अन्तःकोण हैं।
8. $\angle ACE$, $\angle ECD$ और $\angle BAC$ कैसे कोण हैं ?	ये एक सरल रेखा के कोण हैं।
9. $\angle ACE$, $\angle ECD$ और $\angle BCA$ का योग कितना होगा ?	दो समकोण या $180°$
10. $\angle ACE$, $\angle ECD$ और $\angle BCA$ के योग और Δ के अन्तःकोणों ($\angle ABC$, $\angle BCA$ और $\angle BAC$) में क्या सम्बन्ध है ?	$\angle ACE + \angle ECD + \angle BCA$ $= \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA$
11. अतः $\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC$ का योग कितना होगा ?	दो समकोण या $180°$

आदर्श हल–

बिन्दु C पर AB के समान्तर रेखा CE खींची।

$$\angle BAC = \angle ACE \quad \text{(एकान्तर कोण)}$$
$$\angle ABC = \angle ECD \quad \text{(संगत कोण)}$$
$$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$$

दोनों तरफ $\angle BCA$ जोड़ने पर,

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = \angle ACE + \angle ECD + \angle BCA$$

$\angle ACE$, $\angle CED$ और $\angle BCA$ एक सीधी रेखा के कोण हैं। अतः इनका योग दो समकोण या $180°$ होगा।

$$\angle ACE + \angle ECD + \angle BCA = 180°$$

अतः $\quad \angle BAC + \angle ABC + \angle BCA = 180°$

अभ्यास कार्य–

(i) ΔABC में $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ तो $\angle C = ?$

(ii) ΔABC में $\angle A = 40°$, $\angle C = 80°$ तो $\angle B = ?$

(iii) ΔABC में $\angle A + \angle B = 130°$ तो $\angle C = ?$

गृह कार्य–

पाठ-सूत्र 5

कालांश..........

विषय—गणित

समय—30 मिनट

प्रकरण—घड़ी अंकगणित

दिनांक..........

कक्षा—VII

शिक्षण उद्देश्य	अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन
ज्ञानात्मक	छात्र घड़ी-अंकगणित पद्धति का प्रत्यास्मरण कर सकेंगे।
अवबोधात्मक	छात्र घड़ी-अंकगणित पद्धति का प्रत्याभिज्ञान कर सकेंगे।
कौशलात्मक	छात्र घडी का चित्र बनाकर उसमें धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशाओं को प्रदर्शित कर सकेंगे।
अनुप्रयोगात्मक	छात्र घड़ी-अंकगणित पद्धति द्वारा योग तथा व्यवकलन क्रियाएँ कर सकेंगे।
अभिरुच्यात्मक	छात्र घड़ी-अंकगणित पद्धति को सीखने में रुचि लेंगे।
अभिवृत्यात्मक	छात्र घड़ी-अंकगणित पद्धति पर अपनी धारणाएँ निर्मित कर सकेंगे।
सहायक-सामग्री—	कक्षा कक्षोपयोगी सहायक-सामग्री, घड़ी, चार्ट आदि।
पूर्व ज्ञान—	छात्र गणित की मूलभूत क्रियाएँ करने की जानकारी रखते हैं।

प्रस्तावना—

अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ
1. 2 + 2 का मान क्या होगा ?	4
2. 1 में 4 जोड़ने पर योगफल कितना आयेगा ?	5
3. पाँच अंकों की घड़ी-अंकगणित पद्धति के आधार पर 1 और 4 का योगफल होगा ?	समस्यात्मक

उद्देश्य कथन— *आज हम घड़ी-अंकगणित पद्धति के द्वारा गणित की मूलभूत क्रियाएँ करेंगे।*

प्रस्तुतीकरण—

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
पाँच अंक की घड़ी-अंकगणित	छात्र-अध्यापक घड़ी व सारणी की सहायता से निम्न प्रश्न छात्रों से हल करवायेगा।		
	1. इस घड़ी में कुल कितने अंक हैं ?	पाँच।	
	2. पाँच अंक कौन-कौन से हैं ?	0, 1, 2, 3, 4	0, 1, 2, 3 और 4
योग की क्रिया (1 और 2 का योग करना)	3. योग की क्रिया किस दिशा में होती है ?	धनात्मक दिशा में।	
	4. सारणी के आड़े खानों में 1 कितने नम्बर के खाने में है ?	तीसरे।	
	5. सारणी के खड़े खानों में 2 कितने नम्बर के खाने में है।	चौथे में।	
	6. आड़े खानों का तीसरा व खड़े खानों का चौथा जिस खाने पर मिलते हैं उस खाने का अंक क्या है ?	3	
	7. अतः सारणी के अनुसार 1 और 2 का योगफल कितना आया ?	3	सारणी से 1 + 2 = 3
	8. घड़ी के द्वारा 1 और 2 का योगफल कैसे निकालेंगे ?	1 से 2 अंक धनात्मक दिशा में घुमाकर।	घड़ी से 1 + 2 = 3
	9. 1 को 2 अंक धनात्मक दिशा में घुमाने पर क्या अंक प्राप्त हुआ ?	3	
3 + 4 का योगफल ज्ञात करना	10. सारणी के आड़े खानों में 4 कितने नम्बर के खाने में है ?	छठे में।	

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	11. खड़े खानों में 3 कितने नम्बर के खाने में है ?	पाँचवें में।	सारणी से $3 + 4 = 2$
	12. खड़े खानों का पाँचवाँ तथा आड़े खानों का छठा जिस खाने पर मिलते हैं उस खाने का अंक क्या है ?	2	
	13. अतः सारणी के अनुसार 3 और 4 का योगफल कितना आया ?	2	
	14. घडी की सुई को उसे 4 अंक धनात्मक दिशा में घुमाने पर कौन-सा अंक प्राप्त होता है ?	2	घडी से $3 + 4 = 2$
व्यवकलन क्रिया (0–2 का मान ज्ञात करना)	15. प्रश्न में घटाई जाने वाली संख्या क्या है ?	2	
	16. सारणी के आड़े खानों में 2 कितने नम्बर के खाने में है ?	चौथे में।	
	17. चौथे खाने के नीचे के खानों में घटायी जाने वाली संख्या 0 के सामने के खड़े खाने की संख्या क्या है ?	3	
	18. अतः सारणी के अनुसार 0-2 का मान कितना हुआ ?	3	
	19. घड़ी के द्वारा 0-2 का मान कैसे निकालेंगे ?	घड़ी की सुई 0 से 2 अंक ऋणात्मक दिशा में घुमाकर।	

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	20. 0 से 2 अंक ऋणात्मक दिशा में घुमाने पर क्या अंक आया ?	3	
बारह अंकों की घड़ी अंकगणित $4 + 8$ का मान ज्ञात करना	21. सारणी के आड़े खानों में 4 कितने नम्बर के खाने में है ?	छठे में।	सारणी से।
	22. खड़े खानों में 8 कितने नम्बर के खाने में है ?	दसवें में।	$4 \times 8 = 0$
	23. आड़े खानों का छठा तथा खड़े खानों का दसवाँ जिस खाने पर मिलते हैं उस खाने की संख्या क्या है ?	0	
	24. सारणी से $4 + 8$ का मान क्या हुआ ?	0	
	25. बारह अंकों की घड़ी की 4 से 8 अंक धनात्मक दिशा में घुमाने पर कौन-सा अंक आता है ?	0	घडी में $4 \times 8 = 0$
$3 + 7$ का मान ज्ञात करना	26. सारणी के आड़े खानों में 3 किस खाने में है ?	पाँचवें में।	सारणी से।
	27. खड़े खानों में 7 किस खाने में है ?	नवें में।	

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8
10	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
	28. आड़े खानों का पाँचवाँ तथा खानों का नवाँ खाना जिस खाने पर मिलते हैं उस खाने का अंक क्या है ?	10	$3 \times 7 = 10$
	29. घड़ी की सुई उसे 7 अंक धनात्मक दिशा में घुमाने पर कौन-सा अंक आता है ?	10	घड़ी से $3 \times 7 = 10$
	30. अतः $3 + 7$ का मान घड़ी अंकगणित पद्धति से क्या हुआ ?	10	
व्यवकलन क्रिया 5–6	31. प्रश्न में घटाई जाने वाली संख्या क्या है ?	6	सारणी से $5 - 6 = 11$
	32. सारणी के आड़े खानों में 6 कितने नम्बर के खाने में है ?	आठवें।	
	33. आठवें खाने के नीचे के खानों में से 5 अंक के खाने के खड़े खाने की संख्या क्या है ?	11	
	34. अतः सारणी के अनुसार 5–6 का मान क्या हुआ ?	11	
	35. घड़ी की सुई 5 से 6 अंक ऋणात्मक दिशा में घुमाने पर क्या आता है ?	11	घड़ी से $5 - 6 = 11$
	36. अतः 5-6 का मान घड़ी-अंकगणित पद्धति से क्या हुआ ?	11	

पुनरावृत्ति प्रश्न—
1. पाँच अंकों की घड़ी अंकगणित में 2 और 1 का योगफल क्या होगा ?
2. 0-2 का शेषफल क्या होगा ?
3. बारह अंकों की घड़ी-अंकगणित में 8-9 का मान क्या होगा ?

मूल्यांकन प्रश्न— बहु-विकल्प प्रश्न।
1. पाँच अंकों की घड़ी-अंकगणित में $1 + 2$ का मान होगा—
   (अ) 2 (ब) 3 (स) 4 (द) 0 ( )
2. पाँच अंकों की घड़ी-अंकगणित में 0-3 का मान होगा—
   (अ) 3 (ब) 4 (स) 1 (द) 2। ( )

रिक्त स्थान भरो—
1. $1 + 4 = \square$ में, पाँच अंकों की घड़ी-अंकगणित के अनुसार।
2. $7 + 9 = \square$ में, बारह अंकों की घड़ी-अंकगणित के अनुसार।

लघुत्तरात्मक प्रश्न—
1. पाँच अंकों की घड़ी-अंकगणित पद्धति द्वारा निम्न प्रश्न हल करो—
   (i) $2 + 3$ (ii) $0 - 4$।
2. बारह अंकों की घड़ी-अंकगणित पद्धति द्वारा निम्न प्रश्न हल करो—
   (i) $5 + 8$ (ii) $3 - 8$।

पाठ-सूत्र 6

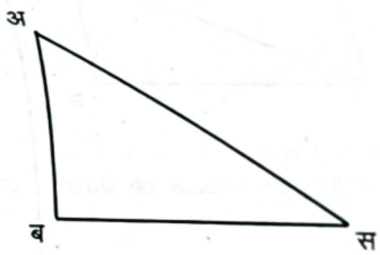
विद्यालय..................
दिनांक..................
कक्षा—VI

विषय—गणित
प्रकरण—त्रिभुज का क्षेत्रफल

कालांश—द्वितीय
अवधि—30 मिनट

शिक्षण उद्देश्य	अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन
1. ज्ञानात्मक	1. छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रत्यास्मरण कर सकेंगे। 2. छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल के अर्थ का प्रत्यास्मरण कर सकेंगे।
2. अवबोधात्मक	1. छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल की व्याख्या कर सकेंगे। 2. छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल को समझने में सक्षम हो सकेंगे।
3. अनुप्रयोगात्मक	1. छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग अन्य प्रश्नों को हल करने में कर सकेंगे। 2. छात्र क्षेत्रफल सम्बन्धी माप का अपने जीवन में उपयोग कर सकेंगे।
4. कौशलात्मक	छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल से सम्बन्धित प्रश्नों को शीघ्रता एवं शुद्धता से हल कर सकेंगे।
5. अभिरुच्यात्मक	छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल को समझने में रुचि लेंगे।
6. अभिवृत्यात्मक	छात्र त्रिभुज के क्षेत्रफल के सम्बन्ध में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित कर सकेंगे।

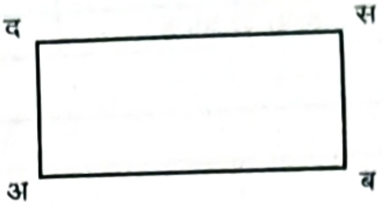
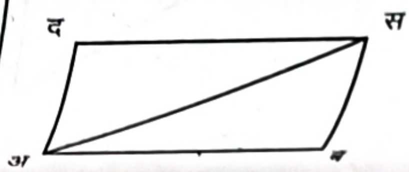
पूर्व-ज्ञान—	छात्र क्षेत्रफल के सम्बन्ध में सामान्य जानकारी रखते हैं।
शिक्षण सहायक-सामग्री—	कक्षोपयोगी सामान, आयत तथा त्रिभुज के मॉडल इत्यादि।
शिक्षण-विधि—	1. प्रदर्शन विधि, 2. विश्लेषणात्मक विधि तथा 3. प्रश्नोत्तर विधि।

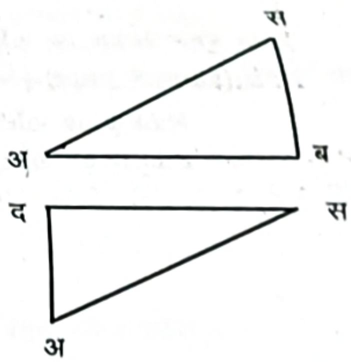
प्रस्तावना—	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ
	छात्र-अध्यापक श्यामपट्ट पर त्रिभुज का चित्र बनाकर निम्न प्रश्न पूछेगा—	
	1. दी गई आकृति में कितनी भुजा हैं ?	तीन भुजा
	2. तीन भुजाओं से घिरी बन्द आकृति को क्या कहते हैं ?	त्रिभुज
	3. कोई भी आकृति किसी एक तल पर जितना स्थान या क्षेत्र घेरती है, उसे क्या कहते हैं ?	क्षेत्रफल
	4. त्रिभुज का क्षेत्रफल क्या होता है ?	?

उद्देश्य कथन—	आज हम त्रिभुज के क्षेत्रफल के बारे में अध्ययन करेंगे।

प्रस्तुतीकरण—

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र	छात्र-अध्यापक छात्रों को आयत का एक मॉडल दिखाकर निम्न प्रश्न पूछेगा—		

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	1. प्रस्तुत आकृति में कितनी भुजाएँ हैं ?	चार भुजाएँ	
	2. आकृति में आमने-सामने की भुजाओं में क्या सम्बन्ध है ?	आमने-सामने की भुजाएँ बराबर हैं।	
	3. चार भुजाओं से घिरी बन्द आकृति को, जिसमें आमने-सामने की भुजाएँ बराबर हों, क्या कहते हैं ?	आयत	
	4. आयत की भुजा 'अ ब' को क्या कहते हैं ?	लम्बाई	
	5. आयत की भुजा 'ब स' को किस नाम से पुकारते हैं ?	चौड़ाई	
	6. आयत के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होता है ?	?	
	छात्र-अध्यापक छात्रों को बतायेगा कि आयत के क्षेत्रफल का सूत्र लम्बाई × चौड़ाई होता है।	छात्र सुनेंगे तथा उत्तर-पुस्तिका में लिखेंगे।	आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = अ ब × ब स
	छात्र-अध्यापक आयत अ ब स द के दो शीर्ष बिन्दु अ तथा स को मिलाकर निम्न प्रश्न पूछेगा—		
	7. इस प्रकार बनी आकृति अ ब स में कितनी भुजाएँ हैं ?	तीन भुजाएँ हैं।	

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	8. दूसरी आकृति अ स द में कितनी भुजाएँ हैं ?	तीन भुजाएँ हैं।	
	9. तीन भुजाओं से बन्द घिरी आकृति को क्या कहते हैं ?	त्रिभुज कहते हैं।	
	10. त्रिभुज अ ब स तथा त्रिभुज अ स द के क्षेत्रफल में क्या सम्बन्ध है ?	दोनों त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है।	
	11. इन दोनों समान त्रिभुजों के द्वारा मिलकर घेरा गया क्षेत्रफल किसके बराबर है ?	आयत अ ब स द के बराबर।	
	12. अतः इन दो समान त्रिभुजों का क्षेत्रफल क्या होगा ?	?	
	छात्र-अध्यापक छात्रों को बतायेगा कि दो समान त्रिभुजों का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल के बराबर होगा।	छात्र सुनेंगे तथा अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखेंगे।	दो समान त्रिभुजों का क्षेत्रफल = आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई = (भुजा अ ब × भुजा ब स)
	13. एक त्रिभुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का कितना होगा ?	त्रिभुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल का आधा होगा।	एक त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (भुजा अ ब × भुजा ब स)
	14. त्रिभुज अ ब स में भुजा अ ब को क्या कहते हैं ?	भुजा अ ब को आधार कहते हैं ?	भुजा अ ब = आधार
	15. त्रिभुज अ ब स में भुजा ब स को किस नाम से पुकारते हैं ?	भुजा ब स को ऊँचाई के नाम से पुकारते हैं।	भुजा ब स = ऊँचाई

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
	16. Δ अ ब स में ∠ब का मान क्या है ?	∠ब = 90	
	17. अतः समकोण त्रिभुज के क्षेत्रफल को किस सूत्र द्वारा प्रकट कर सकते है ?	समकोण त्रिभुज अ ब स का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (भुजा अ ब × भुजा ब स) $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)	समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (भुजा अ ब × भुजा ब स) $= \frac{1}{4}$ (आधार × ऊँचाई)
त्रिभुज के क्षेत्रफल से सम्बन्धित आंकिक प्रश्न	छात्र-अध्यापक लपेट फलक पर लिखे प्रश्न को एक छात्र से पढ़वायेगा तथा निम्न प्रश्न पूछेगा— एक त्रिभुज का आधार 45 मीटर तथा ऊँचाई 48 मीटर हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?		
	18. प्रश्न में अज्ञात राशि क्या है ?	त्रिभुज का क्षेत्रफल	त्रिभुज का क्षेत्रफल = ?
	19. त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होता है ?	त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)	त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)
	20. उक्त प्रश्न में त्रिभुज का आधार कितना है ?	45 मीटर	त्रिभुज का आधार = 45 मीटर
	21. उक्त प्रश्न में त्रिभुज की ऊँचाई का मान क्या है ?	48 मीटर	त्रिभुज की ऊँचाई = 48 मीटर

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
	22. अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना होगा ?		त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) $= \frac{1}{2} \times 45 \times 24$ वर्ग मीटर $= 45 \times 24$ वर्ग मीटर = 1080 वर्ग मीटर
	छात्र-अध्यापक लपेट फलक पर लिखे प्रश्न को एक छात्र से पढ़वायेगा तथा निम्न प्रश्न पूछेगा— एक त्रिभुज का आधार 14 मीटर तथा ऊँचाई 8 मीटर हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो ?		
	23. उक्त प्रश्न में हमें क्या ज्ञात करना है ?	त्रिभुज का क्षेत्रफल	त्रिभुज का क्षेत्रफल = ?
	24. प्रश्न में त्रिभुज के आधार का मान कितना है ?	14 मीटर	त्रिभुज का आधार = 14 मीटर
	25. त्रिभुज की ऊँचाई क्या है ?	8 मीटर	त्रिभुज की ऊँचाई = 8 मीटर
	26. त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होता है ?	$\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)	त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई)
	27. अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल कितना होगा ?		अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 14 \times 8$ वर्ग मीटर $= 7 \times 8$ वर्ग मीटर = 56 वर्ग मीटर।

पुनरावृत्ति प्रश्न—

1. आयत के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होता है ?
2. त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र क्या होता है ?
3. त्रिभुज का क्षेत्रफल तथा आयत के क्षेत्रफल में क्या सम्बन्ध होता है ?
4. एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
5. एक त्रिभुज का आधार 6 सेमी तथा ऊँचाई 3 सेमी हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल बताइये।

मूल्यांकन प्रश्न—

(बहुविकल्पीय प्रश्ंन)

1. आयत के क्षेत्रफल का सूत्र होता है—

   (अ) आधार × ऊँचाई (ब) लम्बाई × चौड़ाई (स) लम्बाई/चौड़ाई। ( )

2. त्रिभुज के क्षेत्रफल का मान क्या होगा ?

   (अ) $\frac{1}{2}$ (आधार × ऊँचाई) (ब) 2 (आधार × ऊँचाई) (स) $\frac{\text{आधार}}{2 \times \text{ऊँचाई}}$ ( )

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

3. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (आधार × ....)।
4. त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ (.......................× ....)।
5. आयत की लम्बाई = आयत का क्षेत्रफल/...............................।

लघुत्तरात्मक प्रश्न—

6. त्रिभुज के क्षेत्रफल तथा आयत के क्षेत्रफल में क्या सम्बन्ध होता है ?
7. एक त्रिभुज का आधार 4 सेमी तथा ऊँचाई 1 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल बताओ।
8. एक त्रिभुज का आधार 3 सेमी तथा ऊँचाई 2 सेमी हो तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

पाठ-सूत्र 7

विद्यालय.......................... **अवधि**—40 मिनट

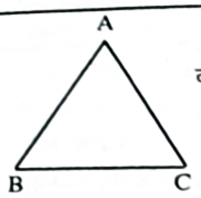
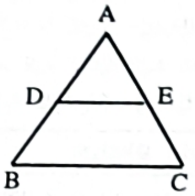
कक्षा—IX **विषय**—गणित

सैक्शन.......................... **दिनांक**..........................

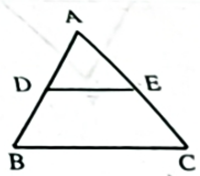
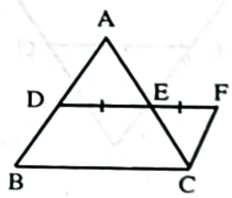
प्रकरण—किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समान्तर होती है।

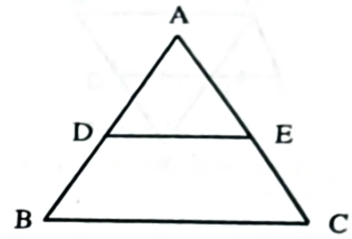
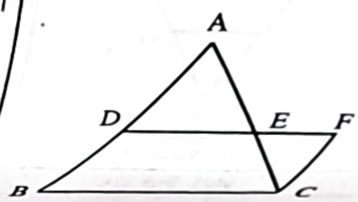
उद्देश्य	अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन
1. **ज्ञान** (Knowledge)	1. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे प्रमेय—किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समान्तर होती है—का प्रत्यास्मरण कर सकें। 2. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे प्रमेय—किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समान्तर होती है—को सिद्ध करने की उपयुक्त विधि का प्रत्यास्मरण कर सकें।
2. **बोध** (Understanding)	3. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे प्रमेय—किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा त्रिभुज की तीसरी भुजा की आधी और समान्तर होती है—को सिद्ध करने के लिए उपयुक्त विधि की स्थापना कर सकें।
3. **प्रयोग** (Application)	4. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे उपर्युक्त प्रमेय का सम्बन्धित समस्याओं में प्रयोग कर सकें।
4. **कौशल** (Skill)	5. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे उपर्युक्त प्रमेय का चित्र शुद्धता एवं सरलता से खींच सकें।
सहायक-सामग्री	चॉक, डस्टर, ब्लैक-बोर्ड, लपेट फलक।
पूर्व ज्ञान (Previous Knowledge)	1. छात्र त्रिभुज के बारे में सामान्य जानकारी रखते हैं। 2. छात्र समान्तर चतुर्भुज के बारे में सामान्य ज्ञान रखते हैं।

प्रस्तावना (Presentation)

	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ
	 की आकृति B-B पर बनाकर	
	1. यह किसकी आकृति है ?	यह त्रिभुज की आकृति है।
	2. इस त्रिभुज की AB तथा AC भुजा के मध्य बिन्दु क्या हैं ?	भुजा AB तथा AC के मध्य बिन्दु क्रमशः D तथा E हैं।
	3. इन D तथा E बिन्दुओं को मिलाने पर क्या प्राप्त होता है ? 	D तथा E बिन्दुओं को मिलाने पर सरल रेखा DE प्राप्त होती है।
	4. किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का तीसरी भुजा से क्या सम्बन्ध होता है ?	समस्या।
उद्देश्य कथन (Statement of Aim)	*किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समान्तर तथा उसकी आधी होती है। आज हम उपर्युक्त प्रमेय के बारे में अध्ययन करेंगे।*	

प्रस्तुतीकरण (Presentation)

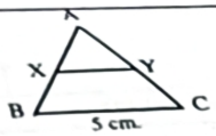
शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
Analysis	1. प्रमेय में क्या दिया है ?	ABC एक Δ है जिसकी AB तथा AC भुजा के मध्य बिन्दु D तथा E हैं।	
	2. क्या सिद्ध करना है ?	DE रेखा BC रेखा के समान्तर तथा आधी है।	
	3. DE रेखा BC रेखा की $\frac{1}{2}$ कब हो सकती है ?	जब DE रेखा को दोगुना कर दिया जाये और 2 DE = BC के हो।	
	4. DE रेखा को दोगुना तथा BC रेखा के बराबर करने के लिए क्या रचना करनी पड़ेगी ?	DE को F बिन्दु तक बढ़ाना पड़ेगा, ताकि DE = EF के।	
	5. दूसरी बात क्या सिद्ध करनी है ?	DE रेखा BC के समान्तर होगी।	
	6. यह कब सिद्ध हो सकता है ?	यदि यह सिद्ध हो जाये कि DBCF एक समान्तर चतुर्भुज है।	
	7. यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि DBCF एक समान्तर चतुर्भुज है ?	यदि यह सिद्ध हो जाये कि DB बराबर और समान्तर FC के।	
	8. दो रेखाएँ कब समान्तर सिद्ध की जा सकती हैं ?	जब उन रेखाओं पर बने एकान्तर कोण समान हों।	

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	9. अतः DB को FC के समान्तर कब सिद्ध किया जा सकता है ?	जब $\angle DAE = \angle FCE$ जो कि एकान्तर कोण हैं।	
	10. यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि DB = FC ?	यदि यह सिद्ध हो जाये कि FC = AD क्योंकि DB = AD	
	11. यह कैसे सिद्ध कर सकते हैं कि AD = FC तथा $\angle DAE = \angle FCE$?	यह ΔADE तथा ΔEFC को सर्वांगसम सिद्ध करने पर हो सकता है।	
	अध्यापक कथन—ΔADE तथा ΔEFC में दो भुजा तथा एक कोण बराबर है। अतः ΔADE तथा ΔEPC को आसानी से सर्वांगसम सिद्ध किया जा सकता है।		
Synthesis	1. प्रमेय में क्या दिया हुआ है ?	ABC एक Δ है, D तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं और D तथा E को मिला दिया गया है।	
	2. प्रमेय में क्या सिद्ध करना है ?	1. $DE = \frac{1}{2} BC$ 2. $DE \parallel BC$	
	3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये क्या रचना करनी पड़ेगी ?	DE को F बिन्दु तक इस तरह बढ़ाया जाय कि DE = EF तथा F को C से मिला दिया।	

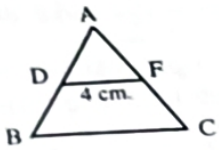
शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	4. उपर्युक्त रचना करने पर क्या प्राप्त होता है ?	ΔADE तथा ΔEFC प्राप्त होते हैं।	
	5. ΔADE तथा ΔEFC में, AE तथा EC भुजा में क्या सम्बन्ध है ?	AE = FC (given)	
	6. DE तथा EF में क्या सम्बन्ध है ?	DE = EF (रचना से)	
	7. $\angle AED$ तथा $\angle FEC$ में क्या सम्बन्ध है ?	$\angle AED = \angle FEC$ (सम्मुख कोण)	
	8. अतः ΔADE तथा ΔEFC में क्या सम्बन्ध होगा ?	$\Delta ADE = \Delta EFC$	
	9. जब ΔADE तथा ΔEFC सर्वांगसम हैं तो भुजा AD तथा भुजा CF में क्या सम्बन्ध होगा ?	AD = CF	
	10. भुजा AD तथा भुजा BD में क्या सम्बन्ध है ?	AD = BD (given)	
	11. जब AD = CF तथा AD = BD तो CF भुजा तथा BD भुजा में क्या सम्बन्ध होगा ?	CF = BD	
	12. जब ΔAED तथा ΔFEC सर्वांगसम हैं तो $\angle DAE$ तथा $\angle ECF$ में क्या सम्बन्ध होगा ?	$\angle DAE = \angle ECF$	

शिक्षण-बिन्दु	छात्र-अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	13. $\angle DAE$ तथा $\angle ECF$ कैसे कोण है ?	$\angle DAE$ और $\angle ECF$ एकान्तर कोण हैं।	
	14. जब $\angle DAE = \angle ECF$ एकान्तर कोण है तो AD भुजा तथा CF भुजा में क्या सम्बन्ध होगा ?	$AD \parallel CF$	
	15. जब $AD \parallel CF$ तो BD तथा CF में क्या सम्बन्ध होगा ?	$BD \parallel CF$	
	16. जब $BD \parallel CF$ तथा $BD = CF$ तो BCDF कैसा चतुर्भुज होगा ?	BCDF एक समान्तर चतुर्भुज होगा ।	
	17. जब BCDF एक समान्तर चतुर्भुज है तो भुजा DF तथा BC में क्या सम्बन्ध होगा ?	$BC = DF$ तथा $BC \parallel DF$	
	18. DF तथा DE में क्या सम्बन्ध है ?	$DE = \frac{1}{2} DF$	
	19. DF भुजा तथा BC भुजा में क्या सम्बन्ध है ?	$DF = BC$	
	20. जब $DE = \frac{1}{2} DF$ तथा $DF = BC$ तो DE तथा BC में क्या सम्बन्ध होगा ?	$DE = \frac{1}{2} BC$	
	21. जब $BC \parallel DE$ तो DE तथा BC भुजा में क्या सम्बन्ध होगा ?	$BC \parallel DE$ (इति सिद्धम्)।	

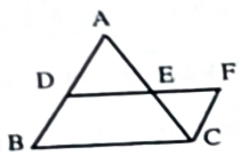
मूल्यांकन प्रश्न–



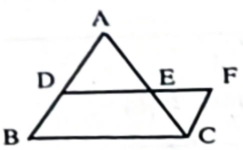
1. चित्र में XY की नाप लिखो। जबकि X तथा Y क्रमशः AB तथा AC भुजा के मध्य बिन्दु है तथा $BC = 5$ सेमी. है।



2. चित्र में BC की लम्बाई लिखो। जबकि D तथा F क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु है तथा $DF = 4$ सेमी. है।



3. दिये गये चित्र में चतुर्भुज DBFC कैसा होगा। जबकि D तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु है तथा $DE = \frac{1}{2}$ DF।



4. दिये गये चित्र में ΔADE तथा ΔEFC में क्या सम्बन्ध होगा जबकि D तथा E क्रमशः AB तथा AC के मध्य बिन्दु है तथा $DE = \frac{1}{2}$ DF है।

गृह कार्य– सिद्ध करो कि किसी त्रिभुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ त्रिभुज को चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करती हैं।

पाठ-सूत्र 8

विद्यालय..................

कक्षा–IX   विभाग..................   कालांश..................

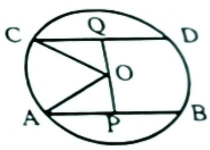
दिनांक..................   समय..................   विषय–ज्यामिति

प्रकरण–किसी वृत्त में बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं।

उद्देश्य	
ज्ञान (Knowledge)–	1. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे किसी वृत्त में बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं का प्रत्यास्मरण कर सकें। 2. छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं को सिद्ध करने की उपयुक्त विधि का प्रत्यास्मरण कर सकें।
बोध (Understanding)–	छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं को सिद्ध करने की उपयुक्त विधि का प्रत्यास्मरण कर सकें।
प्रयोग (Application)–	छात्रों को इस योग्य बनाना कि उपयुक्त प्रमेय का सम्बन्धित समस्याओं में प्रयोग कर सकें।
कौशल (Skill)–	छात्रों को इस योग्य बनाना कि वे चित्र आदि को शीघ्र एवं शुद्धता से खींच सकें।
सहायक-सामग्री (Teaching Aid)–	चॉक, डस्टर, ब्लैक-बोर्ड, चार्ट आदि।
पूर्व ज्ञान (Previous Knowledge)–	छात्र, वृत्त, जीवा, केन्द्र तथा परिधि के बारे में सामान्य ज्ञान रखते हैं।

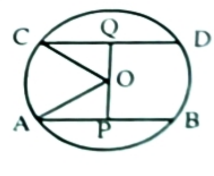
प्रस्तावना (Introduction)

अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
1. यह किसका चित्र है ?	वृत्त का	
2. इस वृत्त में '0' बिन्दु क्या है ?	केन्द्र	
3. जो रेखा केन्द्र बिन्दु में से होकर जाती है उसे क्या कहते हैं ?	व्यास	

अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
4. AB तथा CD इस वृत्त में क्या हैं ?	जीवाएँ	
5. OP तथा OQ इस वृत्त में क्या हैं ?	लम्ब	
6. दोनों जीवाएँ आपस में कैसी हैं ?	बराबर हैं	
7. यदि किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं तो यह कैसे सिद्ध करोगे ?	समस्या	

उद्देश्य कथन– आज हम किसी वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होती हैं, के विषय में अध्ययन करेंगे।

प्रस्तुतीकरण (Presentation)

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
विश्लेषण (Analysis)	1. इस प्रमेय में हमें क्या सिद्ध करना है ?	OP = OQ	
	2. यदि वृत्त में दोनों जीवाएँ AB तथा CD आपस में बराबर हैं तो क्या सिद्ध करना है ?	दोनों जीवाएँ केन्द्र से बराबर दूरी पर होंगी।	
	3. जीवाएँ AB तथा CD की बिन्दु O से दूरी किस प्रकार व्यक्त की जाती है ?	केन्द्र बिन्दु O से AB तथा CD पर लम्ब खींचकर।	

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	4. यदि AB तथा CD पर खींचे गये लम्बों की लम्बाई OP तथा OQ है, तो क्या सिद्ध करना है ?	तो सिद्ध करना है कि जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर होती हैं।	
	5. OP = OQ सिद्ध करने के लिए हमें किस प्रकार की रचना करनी चाहिए ?	केन्द्र बिन्दु O को A व C से मिला देना चाहिए।	
	6. केन्द्र बिन्दु O को A तथा C से मिलाने पर कौन-से त्रिभुज प्राप्त होते हैं ?	Δ OQC, Δ OAP	
	7. OQ तथा OP सिद्ध करने के लिए कौन-कौन-से त्रिभुजों को सर्वांगसम करना है ?	Δ OQC, Δ OAP को	
	8. Δ OCQ एवं OAP को सर्वांगसम कब सिद्ध किया जा सकता है ?	जब तीनों भुजाएँ या कोण आपस में बराबर हों।	
अध्यापक कथन—	चूँकि ये दोनों त्रिभुज इन शर्तों को पूरा करते हैं, अतः इन्हें आसानी से सर्वांगसम सिद्ध किया जा सकता है।		
संश्लेषण (Synthesis)	1. प्रमेय में क्या ज्ञात है ? 2. ΔOAP तथा ΔOQC किस प्रकार के त्रिभुज हैं ?	AB = CD समकोण त्रिभुज	**रचना**—OA और OC को मिलाया। **उपपत्ति**—चूँकि, OP जीवा AB पर लम्ब है।

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	3. ΔOAP तथा Δ OQC समकोण त्रिभुज क्यों है ?	$\angle P$ तथा $\angle Q$ 90° का है।	$\because$ OP, AB को विभाजित करती है
	4. समकोण Δ OAP तथा Δ OCQ की भुजाओ मे परस्पर क्या सम्बन्ध है ?	OC = OA तथा AP = $\frac{1}{2}$ AB तथा CQ = $\frac{1}{2}$ CD	AP = $\frac{1}{2}$ AB C Q = $\frac{1}{2}$ CD परन्तु AB = CD AP = CQ
	5. अतः Δ OCQ तथा OAP दोनों किस प्रकार के त्रिभुज होंगे ?	सर्वांगसम त्रिभुज	अतः समकोण त्रिभुज OPA और OQC मे कर्ण OA = कर्ण OC AP = C Q
	6. दोनो त्रिभुज सर्वागसम होने पर उन भुजाओं में परस्पर क्या सम्बन्ध है ?	OP = OQ	Δ APO = Δ CQO अत OP = OQ

मूल्यांकन—

1. वृत्त में बिन्दु O क्या है ?
   (A) मध्य बिन्दु, (B) केन्द्र बिन्दु, (C) जीवा। = (B)
2. AB तथा CD क्या हैं ?
   (A) जीवाएँ, (B) रेखाएँ, (C) कोण। = (A)
3. चित्र में OP तथा OQ क्या है ?
   (A) लम्ब, (B) जीवा, (C) कोण। = (A)
4. CO तथा OA चित्र मे क्या है ?
   (A) त्रिज्या, (B) व्यास, (C) रेखा। = (A)

पाठ-सूत्र 9

भौतिक आयाम

दिनांक.................... विषय—गणित कालांश....................

कक्षा—VII प्रकरण—समुच्चय अवधि—30 मिनट

उद्देश्य	अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन
ज्ञानात्मक	1. छात्र गणितीय शब्दावली के पद समुच्चय की परिभाषा का प्रत्यास्मरण कर सकेंगे। 2. छात्र दिये गये समुच्चय के अवयवों या सदस्यों को पहचानने में सक्षम हो सकेंगे।
अवबोधात्मक	1. छात्र समान समुच्चय तथा उप-समुच्चय में भेद करने में सक्षम हो सकेंगे। 2. छात्र दिये गये समुच्चयों में परस्पर सम्बन्ध स्थापित कर सकेंगे।
अनुप्रयोगात्मक	छात्र दिये गये समुच्चय के समान समुच्चय, उप-समुच्चय बनाने में सक्षम हो सकेंगे।
कौशलात्मक	छात्र समुच्चय से सम्बन्धित प्रश्नों को शुद्धता एवं शीघ्रता से हल कर सकेंगे।
अभिरुच्यात्मक	छात्र इस प्रकार के प्रचलित शब्दों जिनमें संग्रह का बोध हो, के समुच्चय बनाने में रुचि ले सकेंगे।
अभिवृत्यात्मक	छात्र विभिन्न समुच्चयों के सम्बन्ध में अपना उचित दृष्टिकोण बना सकेंगे।
सहायक सामग्री—	कक्षा-कक्षोपयोगी, चार्ट, कप, गिलास, प्लेट, बोतल आदि।
पूर्व ज्ञान—	छात्र समुच्चय के बारे में सामान्य जानकारी रखते हैं।
शिक्षण-विधि—	प्रश्नोत्तर एवं विश्लेषण विधि।

प्रस्तावना प्रश्न	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ
	1. कक्षा शब्द किसके समूह का बोध कराता है ?	विद्यार्थियों के
	2. टीम शब्द किसके समूह का बोध कराता है ?	खिलाडियों के
	3. फौज शब्द से किसके समूह का बोध होता है ?	सैनिकों के
	4. गणित के अन्तर्गत इस प्रकार के समूह या संग्रह को प्रकट करने को क्या कहते हैं ?	समुच्चय
उद्देश्य कथन—	गणित के अन्तर्गत इस प्रकार के समूह या संग्रह को प्रकट करने को समुच्चय कहते हैं। आज हम समुच्चय के बारे में अध्ययन करेंगे।	

प्रस्तुतीकरण—

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
समुच्चय	छात्र-अध्यापक छात्रों से मेज पर रखी (कप, गिलास, प्लेट, बोतल) वस्तुओं पर निम्न प्रश्न करेगा।		
	1. मेज पर किन-किन वस्तुओं का संग्रह किया गया है ?	कप, गिलास, प्लेट, बोतल का।	
	2. वस्तुओं के इस प्रकार के संग्रह को गणित की शब्दावली में क्या कहेंगे ?	समुच्चय	
	3. यदि इस समुच्चय को 'अ' से प्रकट किया जाये तो हम इसे शब्दों में किस प्रकार व्यक्त करेंगे ?	अ एक समुच्चय है जिसके सदस्य कप, गिलास, प्लेट, बोतल हैं।	

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	4. इस बात को हम गणित में किस प्रकार प्रकट करेंगे ?	?	
	अध्यापक कथन—इसको गणित में प्रकट करने के लिए समुच्चय के अवयवों या सदस्यों को उनके मध्य कोमा (,) लगाकर मँझले कोष्ठक में लिखेंगे।	छात्र ध्यान देंगे। (श्रवण करेंगे)	अ = {कप, गिलास, प्लेट, बोतल}
समान समुच्चय	छात्र-अध्यापक छात्रों को चार्ट पर पहले (जवाहरलाल नेहरू, महात्मा गाँधी तथा सुभाषचन्द्र बोस के) चित्र व बाद में बदले हुए क्रम में (सुभाषचन्द्र बोस, जवाहरलाल नेहरू तथा महात्मा गाँधी के) चित्र दिखाता हुआ निम्न प्रश्न उनसे करेगा।		समान समुच्चय
	1. चार्ट पर किन-किन व्यक्तियों के चित्र हैं ?	जवाहरलाल नेहरू, महात्मा गाँधी तथा सुभाषचन्द्र बोस के।	
	2. इन चित्रों के समूह को गणित में हम क्या कहेंगे ?	समुच्चय	
	3. यदि इस समुच्चय को 'अ' से प्रकट किया जाये तो इसे हम गणित में किस प्रकार प्रकट करेंगे ?	'अ' बराबर मँझला कोष्ठक जवाहरलाल नेहरू कोमा महात्मा गाँधी कोमा सुभाषचन्द्र बोस मँझला कोष्ठक बन्द।	अ = {जवाहरलाल नेहरू, महात्मा गाँधी, सुभाषचन्द्र बोस}

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट कार्य
	4. चार्ट पर नीचे किन-किन व्यक्तियों के चित्र हैं ?	सुभाषचन्द्र बोस, जवाहरलाल नेहरू तथा महात्मा गाँधी के।	
	5. यदि इस समुच्चय को 'ब' से प्रकट किया जाये तो इसे हम गणित में किस प्रकार प्रकट करेंगे ?	'ब' बराबर मँझला कोष्ठक सुभाष चन्द्र बोस कोमा जवाहरलाल नेहरू कोमा महात्मा गाँधी मँझला कोष्ठक बन्द।	ब = {सुभाषचन्द्र बोस, जवाहरलाल नेहरू, महात्मा गाँधी}
	6. समुच्चय 'अ' में कितने सदस्य हैं ?	तीन	
	7. समुच्चय 'ब' में कितने सदस्य हैं ?	तीन	
	8. इन दोनों समुच्चयों में ऐसा कौन-सा सदस्य है जो समुच्चय 'अ' में है और समुच्चय 'ब' में नहीं या समुच्चय 'ब' में है और समुच्चय 'अ' में नहीं है ?	ऐसा कोई सदस्य नहीं है।	
	9. इस प्रकार के समुच्चय जिनमें अवयव सदस्य वही हों, लेकिन उनका क्रम बदला हुआ हो क्या कहलाते हैं ?	समान समुच्चय।	
रिक्त समुच्चय	1. 5 और 7 के बीच पड़ने वाली विषम संख्याएँ कौन-कौन-सी हैं ?	कोई नहीं।	रिक्त समुच्चय—5, 7

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	2. 5 और 7 के बीच पड़ने वाली विषम संख्याओं के समुच्चय के अवयव या सदस्य कौन-कौन-से होंगे ?	कोई सदस्य नहीं।	
	3. 14 और 16 के बीच पड़ने वाली सम संख्याएँ कौन-कौन-सी हैं ?	कोई नहीं।	14 , 16
	4. 14 और 16 के बीच पड़ने वाली सम संख्याओं के समुच्चय के सदस्य कौन-कौन-से हैं ?	कोई सदस्य नहीं।	
	5. चन्द्रमा पर कौन-कौन-से प्राणी रहते हैं ?	कोइ प्राणी नहीं रहता है।	
	6. चन्द्रमा पर रहने वाले प्राणियों के समुच्चय के सदस्य कौन-कौन-से होंगे ?	कोई सदस्य नहीं।	
	7. इस प्रकार के समुच्चय जिनमें कोई अवयव या सदस्य नहीं होता है, क्या कहलाते हैं ?	?	
	अध्यापक कथन—ऐसे समुच्चयों को रिक्त समुच्चय कहते हैं। इसको { } से प्रकट करते हैं। रिक्त समुच्चय को एक अन्य संकेत ϕ (फाई) से भी प्रकट करते हैं।	छात्र ध्यान देंगे। *(श्रवण करेंगे)*	*ϕ = { }; (रिक्त समुच्चय)*

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
उप-समुच्चय	छात्र-अध्यापक मेज पर तीन समुच्चय 'अ' = {कप, बोतल, प्लेट, गिलास}; ब = {कप, बोतल}; स = {प्लेट, गिलास} बनाकर निम्न प्रश्न छात्रों से करेगा।		उप-समुच्चय— अ = (कप, बोतल, प्लेट, गिलास) ब = (कप, बोतल) स = (प्लेट, गिलास)
	1. समुच्चय 'अ' के कौन-कौन-से सदस्य हैं ?	कप, बोतल, प्लेट तथा गिलास।	
	2. समुच्चय 'ब' के सदस्यों के नाम क्या हैं ?	कप तथा बोतल।	
	3. समुच्चय 'स' के सदस्यों के नाम क्या हैं ?	प्लेट तथा गिलास।	
	4. समुच्चय 'ब' के दोनों सदस्य और किस समुच्चय के सदस्य हैं ?	समुच्चय 'अ' के।	
	5. समुच्चय 'स' के दोनों सदस्य इनमें से और किस समुच्चय के सदस्य हैं ?	समुच्चय 'अ' के।	
	6. समुच्चय 'ब' तथा समुच्चय 'स', समुच्चय 'अ' के किस प्रकार के समुच्चय कहलायेंगे ?	?	
	अध्यापक कथन— समुच्चय 'ब' तथा समुच्चय 'स', समुच्चय 'अ' के उप-समुच्चय कहलायेंगे ?	छात्र सुनेंगे।	

शिक्षण-बिन्दु	अध्यापक क्रियाएँ	छात्र क्रियाएँ	श्यामपट्ट कार्य
	यदि किसी समुच्चय के सभी सदस्य किसी अन्य समुच्चय के भी सदस्य हों, तो वह समुच्चय दूसरे समुच्चय का उप-समुच्चय कहलाता है। अतः समान समुच्चय उप-समुच्चय कहला सकता है, लेकिन उप-समुच्चय समान समुच्चय नहीं।		
पुनरावृत्ति प्रश्न–	1. समुच्चय किसे कहते हैं ? 2. समान समुच्चय किसे कहते हैं ? 3. रिक्त समुच्चय किसे कहते हैं ? 4. उप-समुच्चय किसे कहते हैं ?		
मूल्यांकन प्रश्न–	**वस्तुनिष्ठ प्रश्न** 1. समुच्चय अ = {सेब, केला, नारंगी, नीबू} का अवयव है– (i) चीकू, (ii) नीबू, (iii) टमाटर, (iv) आम। ( ) 2. समुच्चय अ = {गाय, बकरी, ऊँट} का उप-समुच्चय क्या होगा ? (i) {गाय, बकरी} (ii) {गाय, भैंस} (iii) {भैंस, बकरी} (iv) {भैंस, ऊँट}। ( ) **सत्य/असत्य–** 3. उप-समुच्चय को समान समुच्चय कहा जा सकता है। (सत्य/असत्य) 4. रिक्त समुच्चय का संकेत ϕ (फाई) है। (सत्य/असत्य) **लघुत्तरात्मक प्रश्न–** 5. समुच्चय अ = {मोर, कबूतर, मुर्गा} के समान समुच्चय क्या होंगे ? 6. किसी रिक्त समुच्चय का उदाहरण दो। 7. उप-समुच्चय समान समुच्चय से किस प्रकार भिन्न है ?		

22

गणित में निदानात्मक कार्य और उपचारात्मक शिक्षा

[DIAGNOSTIC WORK AND REMEDIAL TEACHING IN MATHEMATICS]

विद्यालय में छात्र भिन्न-भिन्न विषयों का अध्ययन करते हैं तथा शिक्षक विषयों को पढ़ाते हैं, विषय शिक्षण में शिक्षक के सम्मुख एक ही उद्देश्य प्रमुख रूप में होता है कि छात्र विषय को भली-भाँति समझ लें जिससे उनका साफल्य (Achievement) उच्चकोटि का हो, इसके साथ छात्र के सम्मुख भी यही लक्ष्य होता है कि वह उस विषय की अधिक-से-अधिक जानकारी प्राप्त करे जिससे उसका कक्षा में उच्च स्थान बन सके। वास्तव में उपर्युक्त लक्ष्य दोनों ही की दृष्टि में सबसे ऊपर होता है।

परन्तु साफल्य से अधिक महत्त्वशाली बात यह है कि छात्र प्रारम्भ से ही विषय के शिक्षण बिन्दुओं को भली प्रकार समझे तथा शिक्षक विषय पढ़ाते समय अपना ध्यान इन बिन्दुओं पर रखे। ऐसा न करने से छात्र बहुत-से बारीक तथा मुख्य बिन्दुओं का ज्ञान प्राप्त करने में समर्थ नहीं रहता और फिर भी वह कक्षा में उत्तीर्ण होता जाता है, परन्तु प्रश्न केवल उत्तीर्ण होने का ही नहीं है बल्कि विषय की पूर्ण जानकारी का है साफल्य परख (Achievement Test) के आधार पर हमें छात्रों की सफलता का ज्ञान होता है तथा उनको भिन्न-भिन्न श्रेणियों A, B, C में रखा जाता है परन्तु निदानात्मक परख (Diagnostic Test) से हम छात्र विषय में किन-किन शिक्षण बिन्दुओं को नहीं समझ पाये हैं उनका ज्ञान होता है।

उदाहरण के रूप में एक व्यक्ति बुखार से पीड़ित है, डॉक्टर उस व्यक्ति के बुखार के लक्षणों का पता लगाता है कि अमुक बुखार मलेरिया या टाइफाइड है। इस पद्धति को निदान (Diagnosis) कहते हैं। सही निदान के आधार पर बीमारी का उपचार किया जाता है और बुखार का निवारण हो जाता है। चिकित्सा विज्ञान के ज्ञान से ही निदान का कार्य शिक्षा क्षेत्र में भी लिया गया है।

परन्तु प्रश्न यह है कि शिक्षा में किसका निदान करें। प्रत्येक विषय की अपनी प्रकृति होती है तथा उसके अपने शिक्षण-बिन्दु होते हैं जो दूसरे विषय से भिन्न होते हैं। प्रत्येक विषय के अपने पद, प्रत्यय, चिन्ह, सूत्र क्रियाएँ होती हैं जो दूसरे से भिन्न

होती हैं। इस प्रकार गणित विषय शिक्षण में शिक्षक को एक प्रकार के पद, प्रत्यय आदि को छात्रों तक पहुँचाना होता है। यह कार्य प्रारम्भ से ही जब से विषय शिक्षण किया जाता है तभी से शिक्षण बिन्दुओं की स्पष्टता शिक्षक को होनी चाहिए ताकि वह छात्रों को गणित का सही ज्ञान दे सकता है, साथ ही छात्र को गणित का सही ज्ञान सम्भव हो सकता है।

उदाहरण के रूप में गणित में हम + − ÷ × = आदि चिन्हों का प्रयोग करते हैं। यदि किसी प्रकार इनका गलत ज्ञान छात्र को हो जाय तो छात्र इस गलत ज्ञान का सदैव प्रयोग करता रहेगा और उसका विषय में साफल्य कम होता जायेगा, इसलिए इसका निदान परम आवश्यक है।

निदान का कार्य प्रारम्भ से ही होना चाहिए, कहने का तात्पर्य है कि विषय शिक्षण प्रारम्भ करने से पहले छात्रों की सही स्थिति निदान द्वारा ज्ञात की जानी चाहिए। निदानात्मक कार्य प्रत्येक अध्याय के पश्चात् करना चाहिए जिससे उसका निवारण या उपचार उसी समय किया जा सके। यदि छात्र की कमी समय पर दूर नहीं की जाती है तो वह कमी बढ़ती जाती है और छात्र का विषय ज्ञान कम होता जाता है। जैसे ही कमी का आभास होता है उसी वक्त उसका उपचार किया जाना चाहिए ताकि कमी आगे न जा सके, निदान हेतु हम निदान परखों को तैयार करते हैं, उसका वर्णन नीचे दिया गया है।

अब प्रश्न यह उठता है कि गणित में निदान कार्य हेतु किन भिन्न-भिन्न पदों को ध्यान में रखा जाता है जिससे उनकी कमी का सही ज्ञान हो सके। निदान हेतु निम्न पदों को ध्यान में रखा जाता है।

गणित में निदान हेतु पद
(STEPS IN DIAGNOSTIC WORK IN MATHEMATICS)

(1) छात्रों का गणित में किन भिन्न-भिन्न पदों (Terms), प्रत्यय (Concepts), चिन्ह (Symbols), तथ्य (Facts) आदि जिनका छात्रों को सही ज्ञान न हुआ हो उनका पता लगाना।

(2) प्रत्येक पद, प्रत्यय, तथ्य, चिन्ह आदि कितने छात्रों को स्पष्ट नहीं है, इसमें छात्रों का प्रतिशत ज्ञात करके उच्च प्रतिशत से निम्न प्रतिशत के रूप में रखा जाता है। इसका कारण यह है कि यदि किसी गणित के प्रत्यय को अधिक छात्र नहीं समझ पाये हैं तो इसका उच्च प्रतिशत आयेगा और सबसे प्रथम उसका उपचार किया जायेगा। इसके बाद उससे कम प्रतिशत वाले प्रत्यय का उपचार किया जायेगा, यह क्रिया तब तक चलती रहेगी जब तक सभी प्रत्ययों का छात्रों को सही ज्ञान न हो जाय।

(3) तीसरा सोपान यह है कि जो भी पद, प्रत्यय, तथ्य आदि छात्रों को स्पष्ट नहीं हुए हैं उनके स्पष्ट न होने के कारणों को जानना चाहिए। एक बार सही कारण का ज्ञान होने पर उसके निवारण का सही उपचार सम्भव हो सकता है।

छात्रों को गणित सम्बन्धी पद, प्रत्यय, तथ्य आदि स्पष्ट न होने के भिन्न-भिन्न कारण—

(Causes as to why terms, facts, concepts etc. of Mathematics are not clear to the pupils.)

(1) **पिछली कक्षा से चली आ रही कमी**—यदि छात्र को पिछली कक्षा में गणित के पद, प्रत्यय, तथ्य आदि भली प्रकार स्पष्ट नहीं हुए हों तो नवीन ज्ञान जिसका आधार पिछली कक्षा का ज्ञान होता है उसको समझने में रुकावट पैदा हो जाती है, इसलिए नवीन ज्ञान देने से पहले उनकी कमियों को ज्ञात कर उनका निवारण किया जाना आवश्यक है। कक्षा में इन कमियों का ज्ञान निदानात्मक परख द्वारा सम्भव है।

(2) कक्षा में शिक्षण करने से पहले उनकी वास्तविक आवश्यकता जान लेना चाहिए। छात्रों की सफलता उनकी आवश्यकता पर निर्भर करती है इससे उनके सीखने (Learning) में सुविधा होती है।

(3) तीसरा कारण यह हो सकता है कि छात्र को गणित विषय के अध्ययन में रुचि न हो और न आवश्यक प्रेरणा तो छात्र गणित में सफलता प्राप्त नहीं कर पायेंगे।

(4) छात्रों को गणित के प्रत्यय (Concepts) स्पष्ट नहीं हो पाते हैं। यदि उनकी योग्यता (Ability) औसत से कम होती है तो ऐसी स्थिति में छात्रों को गणित के प्रत्यय स्पष्ट नहीं हो पाते हैं।

(5) इनके अतिरिक्त गणित विषय सम्बन्धी पुस्तकें या सहायक सामग्री विद्यालय में उपलब्ध न हो तो शिक्षक को शिक्षण रोचक बनाने में कठिनाई होती है।

(6) गणित के उपयुक्त पाठ्यक्रम के अभाव में भी छात्रों को विषय ज्ञान स्पष्ट नहीं हो पाता है।

(7) यदि गणित का शिक्षक शिक्षण में भिन्न-भिन्न नवीन विधियों का प्रयोग नहीं करता है तो विषय को समझने में मुख्यतया औसत तथा औसत से नीचे के छात्रों को कठिनाई का अनुभव करना पड़ता है।

छात्रों में गणित अध्ययन करते समय बहुत-से शिक्षण-बिन्दु स्पष्ट नहीं हो पाते हैं इन कमियों को जानने हेतु निम्न भिन्न-भिन्न विधियों का प्रयोग किया जाता है—

(Ways of knowing the weekness of pupils in Mathematics.)

(1) सबसे सफल विधि यह है कि छात्रों से समय-समय पर कक्षा तथा कक्षा से बाहर गणित सम्बन्धी प्रश्न पूछे जायें, प्रश्नों के उत्तरों से यह पता चलता है कि छात्रों में क्या कमियाँ हैं, इन कमियों को लगातार नोट करते रहना चाहिए।

(2) छात्रों को गृह-कार्य दिया जाता है जिससे कक्षा शिक्षण ठीक प्रकार समझ में आ जाय। गृह-कार्य का विश्लेषण करने पर भी उनकी कमियों का पता चलता है।

(3) गणित में मौखिक कार्य का अपना महत्त्व है। मौखिक कार्य के द्वारा भी उनकी कमी का आभास होता है।

(4) कभी-कभी छात्रों का साक्षात्कार (Interview) के द्वारा भी छात्रों की गणित में कमियों का ज्ञान होता है।

(5) छात्रों की कमजोरी का पता उनकी उत्तर-पुस्तिकाओं के विश्लेषण द्वारा ज्ञात होता है।

(6) इसके अतिरिक्त अनौपचारिक परिस्थितियाँ; जैसे—प्रयोगशाला पुस्तकालय, गणित सम्बन्धी गोष्ठियाँ, गणित मेला आदि में उनके व्यवहार का निरीक्षण करके भी छात्रों की कमजोरी का पता चलता है।

(7) कभी-कभी साफल्य परख (Achievement Test) के विश्लेषण से भी छात्रों की कमजोरी का पता चल जाता है।

गणित के क्षेत्र में छात्र निम्न प्रकार की गलतियाँ या त्रुटियाँ करते हैं, ये त्रुटियाँ उपर्युक्त विधियों द्वारा ज्ञात होती हैं—

(Mistakes pupils generally commit in Mathematics.)

(1) गणित में प्रयोग होने वाले चिन्हों का गलत प्रयोग करते हैं।

(2) भिन्न-भिन्न गणित के तथ्यों में समानता तथा अन्तर का प्रयोग गलत करते हैं।

(3) भाग देने में तथा गुणा करने में हासिल का गलत प्रयोग।

(4) भिन्नों में हर तथा अंश का गलत प्रयोग।

(5) दो या अधिक प्रत्ययों में अन्तर गलत करते हैं।

(6) समीकरण गलत बनाना, ज्ञात तथा अज्ञात राशियों का स्पष्ट ज्ञान न होना।

(7) रेखागणित के चित्रों की बनावट सही नहीं बना सकना।

(8) गणित के उपकरणों को गलत प्रयोग करना।

(9) भाषा को गणित की भिन्न-भिन्न इकाइयों में प्रदर्शित न करना।

(10) एक इकाई से दूसरी में परिवर्तन करना।

(11) औसत, प्रतिशत, L. C. M., H. C. F. आदि ज्ञान करना।

(12) तर्क तथा भिन्नता ज्ञात करने वाले प्रश्नों के सही उत्तर देना।

नैदानिक परीक्षण के उद्देश्य
(OBJECTIVES OF DIAGNOSTIC TEST)

निदान हेतु प्रत्येक स्तर तथा अध्याय पर एक परीक्षण तैयार किया जाता है। नैदानिक परीक्षणों के पदों की व्याख्या करने से पहले उस परीक्षण के उद्देश्य देना आवश्यक है। नैदानिक परीक्षण के निम्न उद्देश्य हैं—

(1) गणित विषय के शिक्षण तथा अध्ययन में सुधार लाना यह छात्र तथा शिक्षक दोनों के लिए लाभदायक होता है। यदि छात्र किन्हीं गणित के प्रत्ययों को स्पष्ट नहीं समझते हैं तो शिक्षक को अपनी विधि में परिवर्तन लाना होता है।

(2) कक्षा में गणित में पिछड़े बालकों को पहचानना जिससे सुधार हेतु निदान सम्भव हो सके।

(3) छात्रों के विषय सम्बन्धी विकास में रुकावट आने वाले तत्त्वों को जानना तथा उपचारात्मक सुझाव देना।

(4) अध्ययन पद्धतियों का दिशा निर्देशन करना।

(5) गणित में कमजोरी आंकना और उसके आधार पर सामूहिक उपचारात्मक पद्धति अपनाना।

(6) पाठ्यक्रम तथा पाठ्य-वस्तु में कमियों के आधार पर परिवर्तन लाना जिससे वे छात्रों के लिए उपयोगी हों।

(7) छात्रों की कमियों को जानने हेतु उपयुक्त मूल्यांकन प्रक्रिया का प्रयोग करना।

निदानात्मक परख के पद
(STEPS OF DIAGNOSTIC TEST)

निदानात्मक परख तैयार करने में निम्न पदों को ध्यान में रखा जाता है।

(1) गणित के क्षेत्र मे छात्रों द्वारा गलतियों का पता लगाना। यह कार्य या तो गणित के क्षेत्र में साफल्य परख द्वारा या छात्रों को उत्तर-पुस्तिकाओं के विश्लेषण द्वारा ज्ञान होता है।

(2) **परख का निर्माण** (Construction of the Test Items)—इस पद में एक प्रकार की गलती से तीन या चार छोटे-छोटे प्रश्न तैयार किये जाते हैं।

(3) **परख का प्रयोग** (Administration of the Test)—तैयार की गयी परख को छात्रों के बड़े समूह को दिया जाता है।

(4) **गलतियों का पता लगाना** (Locate the Errors)—गलतियों का पता लगाने से उपचार हेतु कार्य सम्भव होता है।

(5) **गलतियों को एक साथ उनकी प्रकृति के अनुसार रखना** (To Categorise the Errors)—इस पद में उच्च प्रतिशत से निम्न प्रतिशत के आधार पर गलतियों के प्रकारों को रखा जाता है। उपचार करने में सबसे प्रथम उच्च प्रतिशत की गलतियों का निवारण किया जाता है, फिर उससे नीचे वाले प्रतिशत की गलतियों का निवारण किया जाता है, इस क्रम में धीरे-धीरे निम्न प्रतिशत वाली गलतियों का उपचार किया जाता है।

(6) अन्त पद में प्रत्येक गलती के कारण का पता लगाया जाता है जिससे भविष्य में उन कारणों पर ध्यान रखा जाय और छात्र गलती दोहरा न सकें।

उपचारात्मक शिक्षण
(REMEDIAL TEACHING)

विषय के क्षेत्र में निदानात्मक कार्य (Diagnostic Work) की समाप्ति पर छात्रों के लिए उनकी कमजोरी दूर करने हेतु शिक्षण देने की व्यवस्था की जानी चाहिए। इस कार्य को उपचारात्मक शिक्षण कहा जाता है। एक बार छात्र की गणित में कमजोरी का पता चलने पर उपचारात्मक कार्य सरल हो जाता है।

उपचारात्मक कार्य वर्ष के अन्त में न करके प्रत्येक अध्याय की समाप्ति पर किया जाना चाहिए। यदि अध्याय के समझने में छात्रों को किसी प्रकार की कठिनाई अनुभव होती है तो उसका निवारण उसी समय करने से छात्रों की कमजोरी आगे नहीं जा पाती है तथा उनको विषय समझने में कम समय लगता है। इस प्रकार निदान तथा उपचार साथ-साथ चलने से विषय का ज्ञान ठीक प्रकार से होता है।

विद्यालय में उपचार हेतु निम्न व्यवस्था करनी चाहिए।

(The following Remedial Programme to be arranged in the school.)

(1) छात्रों की कमजोरी को दूर करने हेतु उसी पाठ्य-वस्तु (Content) को दोहराना चाहिए। इससे उनकी कमजोरी दूर की जा सकती है।

(2) छात्रों की कमजोरी के आधार पर छोटे-छोटे समूह बनाकर अलग-अलग शिक्षण की व्यवस्था की जानी चाहिए।

(3) गणित के क्षेत्र में छोटे-छोटे प्रोजेक्ट तथा समस्याएँ देनी चाहिए। इनके द्वारा कक्षा शिक्षण में जो प्रत्यय स्पष्ट न हो सके हों वे स्पष्ट हो जाते हैं।

(4) छात्रों को अध्याय की समाप्ति पर अभ्यास तथा गृह-कार्य दिया जाना चाहिए ताकि जो कुछ कमजोरी रह गयी हो वह दूर हो जाती है।

(5) **छात्रों को अभिक्रमिक कार्य** (Programmed Work)—उनकी कमजोरी की प्रकृति के अनुसार अभिक्रमिक कार्य देते रहना चाहिए। जो छात्र गणित के जिन तथ्य, पद तथा प्रत्यय को समझने में कठिनाई अनुभव करते हैं, शिक्षक को चाहिए कि वह उन्हीं क्षेत्रों से अभिक्रमिक कार्य तैयार करके स्वयं छात्रों को करने को दें। इस पर कार्य करने से छात्रों की कमजोरी दूर हो जाती है।

(6) गणित के भिन्न-भिन्न क्षेत्रों से जिनमें छात्रों की अधिक कमजोरी होती है उनमें गोष्ठियों का आयोजन कराया जाय। इनके द्वारा भी छात्रों की कमजोरी दूर की जा सकती है।

■■

23

समुच्चय सिद्धान्त एवं गणितीय संरचना : समुच्चय, सम्बन्ध एवं फलन

[SET THEORY AND MATHEMATICAL CONSTRUCTION : SET, RELATION AND FUNCTION]

समुच्चय सिद्धान्त
(SET THEORY)

गणित की विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में समुच्चय की संकल्पना एक मूल संकल्पना है। इसकी सहायता से सम्पूर्ण गणित और विशेष रूप से आधुनिक गणित का अभूतपूर्व विकास हुआ है। समुच्चय सिद्धान्त का सूत्रपात और विकास उन्नीसवीं शताब्दी के अन्त में जर्मन गणितज्ञ जार्ज कैंटर (George Cantor) (1845-1918) ने किया था।

समुच्चय की संकल्पना (Concept of a Set)

टी सेट, डिनर सेट, ताश के पत्तों की गड्डी, भेड़ों का झुण्ड, अंगूर के गुच्छे, संतरों के ढेर, बिन्दुओं का समूह, मनुष्यों का समुदाय इत्यादि जैसे समूहों से हम परिचित हैं।

गणित में सुविधा के लिए इन शब्दों के स्थान पर समुच्चय शब्द का प्रयोग किया जाता है। अतः उपर्युक्त सभी उदाहरण गणित की भाषा में समुच्चयों के उदाहरण हैं। इस प्रकार जाने या अनजाने में प्रारम्भ से ही हम समुच्चयों का प्रयोग करते आये हैं।

"ऐसी वस्तुओं या पदों के संग्रह (Collection) को समुच्चय कहते हैं, जिनमें कोई विशेष गुण (लक्षण) हो।"

अथवा

"वस्तुओं के सुपरिभाषित (Well defined) समूह या संग्रह को समुच्चय कहते हैं।"

कोई वस्तु या पद तभी और केवल तभी उस समुच्चय का सदस्य कहलाता है जब उसमें उस वस्तु का गुण हो।

टिप्पणी 1. वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह से तात्पर्य है कि उसके अवयव सुनिश्चित (defined) एवं सुस्पष्ट (Distinct) हों। सुनिश्चित होने का अर्थ यह है कि हम बता सकें कि अमुक अवयव समूह में है अथवा नहीं। उदाहरणार्थ–किसी कक्षा के अच्छे छात्रों का समूह समुच्चय नहीं होगा, क्योंकि कोई छात्र अच्छा है या नहीं यह स्पष्ट रूप से नहीं कहा जा सकता है। वस्तुतः अच्छा होने का गुण ही सुपरिभाषित नहीं है। "प्रथम पाँच धन संख्याओं का समुच्चय" तो सुपरिभाषित समुच्चय है क्योंकि इसके अवयव 1, 2, 3, 4, 5 हैं। 6, 7, 8, 9....इसके अवयव नहीं हैं।

इसी प्रकार सुस्पष्ट होने का अर्थ है कि किसी समुच्चय में दो या अधिक अवयव एक समान नहीं होने चाहिए अर्थात् समुच्चय में अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं होनी चाहिए। उदाहरणार्थ–यदि किसी समूह के अवयव a, a, b, b, b हों तो स्पष्ट है कि दोनों a, a तथा तीनों b, b, b में सुस्पष्टता नहीं है। अतः यह समूह समुच्चय नहीं हुआ। समूह के प्रत्येक अवयवों में सुस्पष्टता हो, इसके लिए प्रत्येक अवयव को केवल एक ही बार लिखना पर्याप्त होगा। इस प्रकार $\{a, b\}$ का समुच्चय होगा।

टिप्पणी 2. समुच्चय में वस्तुओं का सजातीय होना आवश्यक नहीं है। जैसे–पुस्तक, प्याला, बिल्ली, मेज, मिठाई आदि विजातीय वस्तुएँ किसी समुच्चय के अवयव हो सकते हैं।

समुच्चयों के अवयव (Elements of Sets)

उस वस्तु या पद को जिनसे मिलकर समुच्चय बनता है, उस समुच्चय का अवयव कहते हैं। कोई संतरा, संतरों के ढेर का अवयव है; 'पुस्तक' अध्ययन सम्बन्धी सामग्री के समुच्चय का अवयव है। कुत्ता जानवरों के समुच्चय का अवयव है।

समुच्चयों के उदाहरण

1. शून्य से सौ तक की संख्याओं का समुच्चय।
2. धन पूर्णांकों का समुच्चय।
3. पूर्ण वर्ग संख्याओं का समुच्चय।
4. अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।
5. अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय a, e, i, o, u है।

समुच्चय संकेतन (Set Notation)

सामान्यतः समुच्चय को प्रदर्शित करने के लिए बड़े अक्षरों A, B, C,.......... X, Y, Z का प्रयोग करते हैं और समुच्चय के अवयवों को छोटे अक्षरों $a, b, c,$....... x, y, z से प्रकट करते हैं।

यदि कोई अवयव x समुच्चय A में है, तो इस तथ्य को प्रतीकात्मक भाषा में $x \in A$ से प्रदर्शित करते हैं और इसे 'x अवयव A' पढ़ते हैं।

समुच्चय निरूपण (Representation of a Set)

समुच्चय का निरूपण करने की मुख्यतः दो विधियाँ हैं–

1. तालिका या रोस्टर विधि (Tabulator or Roaster Method)–इस विधि में समुच्चय के सभी अवयवों को मझले कोष्ठक { } के भीतर लिखकर समुच्चय का

निरूपण करते हैं और एक अवयव को दूसरे से अलग करने के लिए बीच में अर्द्ध-विराम का चिन्ह (,) लगा देते हैं। जैसे यदि किसी समुच्चय S के 2, 4, 6, 8 चार अवयव हों, तो इसे इस प्रकार से निरूपित करते हैं–

$$S = \{2, 4, 6, 8\}$$

इसी प्रकार शून्य से नौ तक के अंकों का समुच्चय A इस प्रकार लिखा जायेगा–

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

यदि S आगरा, अजमेर, लखनऊ, इलाहाबाद नगरों का समुच्चय हो, तो इस प्रकार लिखेंगे–

S = {आगरा, अजमेर, लखनऊ, इलाहाबाद}

2. गुण विधि अथवा समुच्चय निर्माण विधि (Property Method or Set Builder form)–इस विधि में यदि कोई समुच्चय ऐसा हो, कि उसके सभी अवयवों में कोई विशेष गुणधर्म हो, तो मझले कोष्ठकों में उस गुण-धर्म का वर्णन करके समुच्चय को प्रकट करते हैं–

उदाहरणार्थ, यदि समुच्चय के सभी अवयव सम संख्याएँ हों और x उसका कोई एक स्वेच्छ अवयव हो, तो लिखते हैं–

A = {x | x सम संख्या है}

या A = {x : x सम संख्या है}

जिसका अर्थ है कि A एक ऐसा समुच्चय है, जिसके अवयव x ऐसे हैं कि x सम संख्या है।

इसी प्रकार $S = \{x \mid P(x)\}$ एक ऐसा समुच्चय है जिसके अवयव x ऐसे हैं, कि उन सभी में $P(x)$ गुण-धर्म है।

कोलन ':' या खड़ी लकीर '|' का प्रयोग 'ऐसे हैं कि' (Such that) के अर्थ में किया जाता है।

उदाहरण–निम्नलिखित उदाहरणों को दोनों विधियों से लिखकर स्पष्ट किया गया है–

(1) समुच्चय {1, 2, 3, 4,.....} को इस विधि से इस प्रकार लिखा जायेगा।

{x : x एक धन पूर्णांक}

या {x | $x = n$, जहाँ n धन पूर्णांक है}

(2) 7 से विभाज्य धन संख्याओं के समुच्चय {7, 14, 21, 28, 35,......} को इस प्रकार लिखा जायेगा–

{x : $x = 7n$, n धन पूर्णांक संख्या है}

तालिका विधि से		निर्माण विधि से
(3) {1, 3, 5,......}		{x | x विषम संख्या}
(4) {1, 4, 9, 16,....}		{x | x पूर्ण वर्ग संख्या}
(5) {5, 7}		{x | x अभाज्य संख्या 3 < x < >}
	या	{x | x अभाज्य संख्या 5≤ ≤ >}
(6) { 2 }		{x | x सम अभाज्य संख्या}

यदि समुच्चय S का एक अवयव x हो, तो कहते हैं कि 'S का अवयव x है' (x belongs to S) और इसे इस प्रकार लिखते हैं–

$x \in S$

यदि x और y, S के अवयव हों, तो इस प्रकार लिखते हैं–

$x, y \in S$

और इसे इस प्रकार पढ़ते हैं 'x, y', S के अवयव हैं।

जब x, S का अवयव नहीं है, तो इस प्रकार लिखते हैं–

$x \in S$

टिप्पणी–जब समुच्चय में अवयवों की संख्या कम होती है, तो उसे सूची (तालिका) विधि द्वारा लिखने में सुविधा होती है, परन्तु यदि अवयवों की संख्या बहुत अधिक अथवा गणना ठीक हो, तो ऐसे समुच्चय को गुण विधि द्वारा लिखने में सुविधा होती है। उदाहरण के लिए, किसी निश्चित समय पर विश्व के समस्त गणित पढ़ने वाले छात्रों का समुच्चय लिखना हो, तो इसे गुण विधि द्वारा सरलता से इस प्रकार लिख सकते हैं–

{x : x किसी निश्चित समय पर विश्व का एक गणित का छात्र है}

समुच्चय के विभिन्न प्रकार (Different Types of Sets)

1. एकल समुच्चय (Singleton set)–ऐसे समुच्चय को जिसमें केवल एक ही अवयव होता है, एकल समुच्चय कहते हैं। {a} एक ऐसा समुच्चय है जिसका एक मात्र अवयव a है। {x | x एक सम अभाज्य संख्या} भी एकल समुच्चय है, क्योंकि इसका अवयव केवल 2 है।

{x : x उ. प्र. के 1 अगस्त, 1985 को राज्यपाल} समुच्चय भी एकल है।

2. परिमित समुच्चय (Finite Set)–यदि किसी समुच्चय में अवयवों की संख्या परिमित हो, तो उसे परिमित समुच्चय कहते हैं।

समुच्चय = {1, 4, 16, 64} एक परिमित समुच्चय है क्यों उसमें केवल चार अवयव है।

3. अनन्त समुच्चय (Infinite Set)–यदि किसी समुच्चय में अवयवों की संख्या अनन्त हो, तो वह अनन्त समुच्चय कहलाता है। समुच्चय = {1, 3, 9, 27, 81,......} एक अनन्त समुच्चय है।

निम्नलिखित अनन्त समुच्चयों के उदाहरण हैं–

(i) {1, 2, 3,.....}

(ii) {1, 3, 5,.......}

(iii) {x | $x = n^2$, महान पूर्णांक}

(iv) {x | x समतल में संगामी रेखाएँ}

4. समान समुच्चय (Equal Sets)–यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि A का प्रत्येक अवयव B का भी अवयव हो और B का प्रत्येक अवयव A का भी अवयव हो, तो दोनों समान या बराबर कहे जाते हैं और इन्हें A = B के रूप में लिखते हैं।

प्रतीकात्मक भाषा में– $x \in A \Rightarrow x \in B$ और $x \in B \Rightarrow x \in A$

अर्थात् $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

यदि A और B सम नहीं है, तो इस तथ्य को $A \neq B$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण–यदि A = {3, 5, 10}, B = {5, 10, 3} तो A = B

अर्थात् {3, 5, 10} = {5, 10, 3}

क्योंकि A का प्रत्येक अवयव 3, 5, 10, B का भी अवयव है और B का प्रत्येक अवयव 5, 10, 3, A का भी अवयव है।

5. रिक्त समुच्चय (Null Set)–ऐसे समुच्चय को जिसमें कोई भी अवयव न हो रिक्त समुच्चय (Empty set, Void set or null set) कहते हैं और चिन्ह ϕ से प्रकट करते हैं।

उदाहरण–{x : $x^2 = 4$, x एक विषम संख्या है} एक रिक्त समुच्चय है, क्योंकि ऐसी कोई विषम संख्या नहीं है, जिसका वर्ग 4 हो।

टिप्पणी–ध्यान रहे कि {0} रिक्त समुच्चय नहीं है, क्योंकि इसमें एक अवयव शून्य है एक एकल समुच्चय है। ϕ और {0} समुच्चयों में अन्तर है। ϕ समुच्चय का कोई अवयव नहीं है, किन्तु 0 समुच्चय {0} का अवयव है। ϕ और {ϕ} के भेद को समझ लेना भी अत्यन्त आवश्यक है, क्योंकि ϕ एक रिक्त समुच्चय है, {ϕ} एक एकल (Singleton) समुच्चय है। {ϕ} का अवयव रिक्त समुच्चय ϕ है। रिक्त समुच्चय को { } के रूप में लिखा जाता है।

6. उपसमुच्चय (Subset)–यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि A के सभी अवयव B के भी अवयव हों, तो A को B का उपसमुच्चय कहते हैं। इस तथ्य को $A \subseteq B$ से निरूपित करते हैं और इसे 'A उपसमुच्चय B' पढ़ते हैं

प्रतीकात्मक भाषा में, $A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B\}$

यदि A, समुच्चय B का उपसमुच्चय नहीं है, तो इस तथ्य को $A \not\subseteq B$ से निरूपित करते हैं।

उदाहरण–यदि B = {x : n समसंख्या} और A = {x : $x = 2^n$, जहाँ n धन पूर्ण संख्या} अर्थात् यदि

B = {2, 4, 6, 8,.....} और A = {2, 4, 8, 16,.....} तो

A, B का उपसमुच्चय है।

7. उचित उपसमुच्चय (Proper Subset)–यदि समुच्चय A, समुच्चय B का उपसमुच्चय हो और $B \neq A$ अर्थात् B में कम-से-कम एक अवयव ऐसा हो, जो A में न हो, तो A को उचित उपसमुच्चय कहते हैं।

प्रतीकात्मक भाषा में यदि $A \subseteq B$ और वह सत्य नहीं है कि $B \subseteq A$, तो A को B का उचित समुच्चय कहते हैं।

टिप्पणी–'समुच्चय B समुच्चय A का उचित उपसमुच्चय है' को चिन्ह $B \subset A$ से सूचित किया जाता है, जबकि 'समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय है' को $B \subseteq A$ से सूचित किया जाता है।

8. समुच्चयों का समुच्चय (Set of Sets)—कभी-कभी ऐसा होता है कि एक समुच्चय के अवयव स्वयं समुच्चय होते हैं जैसे $\{\{2, 3\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ के अवयव समुच्चय $\{2, 3\}, \{2\}, \{3, 4\}$ हैं।

ऐसा समुच्चय जिसके अवयव स्वयं समुच्चय हों, समुच्चयों का समुच्चय कहलाता है।

9. घात समुच्चय (Power set)—दिये हुए समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को A का घात समुच्चय कहते हैं। इसे प्रतीक P (A) से निरूपित किया जाता है,

अर्थात् $P(A) = \{x : x \subseteq A\}$

उदाहरण 1. यदि $A = \{0, 3, 4\}$, तो A का घात समुच्चय

$\{\phi, \{0\}, \{3\}, \{4\}, \{0, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 0\}, \{0, 3, 4\}\}$ है।

उदाहरण 2. यदि $A = \{0, \{2, 3\}\}$ तो P (A) बताइये। इस समुच्चय में दो अवयव 0 और $\{2, 3\}$ हैं। अतः A को 4 उपसमुच्चय होंगे।

ये हैं—$\phi, \{0\}, \{2, 3\}$ तथा $\{0, \{2, 3\}\}$

अतः $P(A) = \{\phi, \{0\}, \{2, 3\}, \{0, \{2, 3\}\}\}$

10. समष्टीय समुच्चय (Universal set)—कभी-कभी ऐसा होता है कि सभी विचाराधीन समुच्चय किसी एक ही समुच्चय $\cup$ के उपसमुच्चय होते हैं। उस अवस्था में समुच्चय $\cup$ को समष्टीय समुच्चय कहते हैं।

उदाहरण—यदि $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $A = \{1, 3, 5, ...\}$, $B = \{2, 4, 6, ...\}$, तो $\cup$, A और B का समष्टीय समुच्चय है।

11. असंयुक्त (विसंघीत) समुच्चय (Disjoint sets)—यदि A और B दो समुच्चयों का एक भी अवयव उभयनिष्ठ न हो, तो A और B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं।

उदाहरण—यदि $A = \{1, 3\}$ और $B = \{2, 5\}$ तो A और B असंयुक्त समुच्चय हैं, क्योंकि कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं है।

12. पूरक समुच्चय (Complementary set)—यदि A एक समुच्चय है तथा $\cup$ उसका समष्टीय समुच्चय है, तो $\cup$ के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A में नहीं है, A का पूरक समुच्चय कहलाता है। A के पूरक समुच्चय को A' या A^c से प्रदर्शित करते हैं। इसकी परिभाषा इस प्रकार भी दी जा सकती है—

A' या $A^c = \{x : x \in \cup, x \notin A\}$

उदाहरण—यदि $A = \{a, b, c, d, e\}$

$\cup = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का अक्षर$\}$, तो

$A' = \{f, g, h, ...x, y, z\}$

13. अन्तर समुच्चय (Difference Set)—समुच्चय A के उन अवयवों का समुच्चय जो B के अवयव नहीं हैं, समुच्चय A और B का अन्तर समुच्चय कहलाता है।

अतः $A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$

अतः $B - A = \{x : x \in B$ और $x \notin A\}$

उदाहरण—यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ तो $A - B = \{1, 2\}$ क्योंकि A के वे अवयव जो B में नहीं हैं; 1, 2 हैं।

पुनः $B - A = \{5, 6, 7\}$, क्योंकि B के वे अवयव जो A में नहीं हैं; 5, 6, 7 हैं।

समुच्चयों का सम्मिलन की परिभाषा—यदि A और B दो समुच्चय हों, तो उन सभी अवयवों का समुच्चय जो या तो A में हैं या B में हैं या A और B दोनों में हैं, A और B का सम्मिलन को $A \cup B$ से सूचित करते हैं। इसे 'A कप B' या 'A जोइन B' या 'A और B' सम्मिलन पढ़ते हैं।

A और B से सम्मिलन की परिभाषा इस प्रकार भी दी जा सकती है—

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ या/और $x \in B\}$

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{2, 3, 4\}$, तो $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

उदाहरण 2. यदि $A = \{a, b, c, d\}$ और $B = \{f, b, d, g\}$, तो $A \cup B = \{a, b, c, d, f, g\}$.

समुच्चयों का प्रतिच्छेद अथवा सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets)—यदि A और B दो समुच्चय हों तो एक ऐसा समुच्चय जिसके सभी अवयव A और B दोनों में उभयनिष्ठ हों, A और B का प्रतिच्छेद अथवा सर्वनिष्ठ कहलाता है। इसे $A \cap B$ के रूप में लिखते हैं और 'A कैप B' या 'A सर्वनिष्ठ B' पढ़ते हैं।

प्रतीकात्मक रूप में, $A \cap B = \{x \mid x \in A$ और $x \in B\}$ इस प्रकार दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक ऐसा समुच्चय होता है, जिसके सभी अवयव उन दोनों समुच्चयों में होते हैं।

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ और $B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, तो $A \cap B = \{2, 5, 8\}$

उदाहरण 2. यदि $A = \{x : 0 < x < B\}$ और $\{B : 1 \leq x \leq 4\}$, तो $A \cap B = \{x : 1 \leq x < 3\}$

अभ्यास-प्रश्न

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

1. निम्नलिखित समुच्चयों के अवयवों को लिखिए—

(A) 12 से कम सम संख्याओं का समुच्चय,

(B) सप्ताह के दिनों के नाम का समुच्चय,

(C) हफ्ता के दिनों के नाम का समुच्चय,

(D) वर्ष के महीनों के नाम का समुच्चय।

उत्तर— (A) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

(B) {सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार, रविवार}

(C) {सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार, रविवार, सोमवार}

(D) {जनवरी, फरवरी, मार्च, अप्रैल, मई, जून, जुलाई, अगस्त, सितम्बर, अक्टूबर, नवम्बर, दिसम्बर}

2. Allahabad शब्द में आये हुए (A) स्वरों का (B) अक्षरों का समुच्चय लिखिए।

उत्तर– (A) {A}

(B) {A, L, H, B, D}

3. निम्नलिखित में से कौन-से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य ?

(A) $\{2\} \in \{2, 3\}$ (B) $2 \subset \{2, 3\}$

(C) $\{2\} \subset \{2, 3\}$ (D) $\{3, 4\} \subset \{3, 5, 3, 5, 3\}$

(E) $x \in \{x, \{x\}\}$ (F) $\{5\} \supset \{2, 5\}$

(G) $\{2, 3\} \subset \{3, 2\}$

उत्तर– (A) असत्य, (B) असत्य, (C) सत्य, (D) असत्य, (E) सत्य, (F) सत्य, (G) सत्य।

4. समुच्चय {2, 3} का घात समुच्चय लिखिए–

उत्तर–$\{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

5. यदि $\cup = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{3, 4, 5, 6\}$ तो ज्ञात करो–

(i) A' (ii) B'

(iii) C' (iv) $A - B$

(v) $A - C$ (vi) $B - A$

(vii) $B - C$ (viii) $C - B$

उत्तर–(i) {5, 6, 7, 8}, (ii) {1, 3, 5, 7, 9}, (iii) {1, 2, 7, 8, 9}, (iv) {1, 3}, (v) {1, 2}, (vi) {6, 8}, (vii) {2, 8}, (viii) {3, 5}.

6. यदि $A = \{a, b, c\}, B = \{a, c, d, e\}, C = \{b, d, e, f\}$ हो, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए–

(A) $A \cup B$

(B) $B \cup C$

(C) $B \cup C$

(D) दिखाओ कि $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

7. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ तथा $C = \{3, 4, 5, 6\}$, तो $(A \cap B) \cap C$ का मान ज्ञान कीजिए।

उत्तर–{4}

8. 100 व्यक्तियों की किसी कार्यशाला में 29 भारतीय महिलाओं तथा 23 पुरुषों ने भाग लिया। इन भारतीयों में 4 डॉक्टर हैं तथा 24 या तो पुरुष हैं अथवा डॉक्टर हैं। गोष्ठी में कोई विदेशी डॉक्टर नहीं है। बताइये कि कितनी महिला डॉक्टर भाग ले रही हैं।

उत्तर–1

सम्बन्ध
(RELATION)

निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए–

(i) मोहन, सोहन का पिता है।

(ii) AB रेखा, PQ पर लम्ब है।

(iii) x, y से कम है।

(iv) y, x से विभाज्य है।

(v) त्रिभुज x, त्रिभुज y के सर्वांगसम है।

(vi) y, x का वर्ग है।

प्रत्येक कथन में दो अवयव हैं, जिनमें एक सम्बन्ध प्रदर्शित किया गया है। (i) में पिता होने का सम्बन्ध है, (ii) में रेखाओं के लम्ब होने का सम्बन्ध है। (iii) में कम होने का, (iv) में विभाज्य होने का, (v) में सर्वांगसम होने का और (vi) में वर्ग होने का सम्बन्ध है।

यदि x, y किसी सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित हैं, तो इसे $x\text{R}y$ लिखते हैं और पढ़ते हैं कि 'x का सम्बन्ध y से है'। सम्बन्ध R दिया हुआ होता है।

इस प्रकार $(x, y) \in R \Leftrightarrow x\text{R}y$

यदि x और y सम्बन्ध R द्वारा सम्बन्धित नहीं है, तो $x \not\text{R} y$ से सूचित करते हैं और पढ़ते हैं कि 'x का सम्बन्ध y से नहीं है'। मान लीजिए (x, y) एक क्रमित युग्म है, जहाँ x, y वास्तविक संख्याएँ हैं। x और y के आपसी सम्बन्ध तीन प्रकार के हो सकते हैं–

(i) $x < y$, (ii) $x = y$, (iii) $x > y$

इसी प्रकार यदि (x, y) सरल रेखाओं का युग्म है, तो दो प्रकार के युग्म हो सकते हैं–

(i) x समान्तर y $(x \parallel y)$

(ii) x लम्ब y $(x \perp y)$

उदाहरण–मानलो x के मान 1, 2, 3 हैं और y के मान 1, 3, 5, 6, 9, 10 हैं, और सम्बन्ध है कि x का वर्ग y के बराबर है अर्थात् $y = x^2$, तो

$1\text{R}_1, 1\not\text{R}_3, 1\not\text{R}_5, 1\not\text{R}_6, 1\not\text{R}_9, 1\not\text{R}_9$

$2\not\text{R}_1, 2\not\text{R}_3, 2\not\text{R}_5, 2\not\text{R}_6, 2\not\text{R}_9, 2\not\text{R}_{10}$

$3\not\text{R}_1, 3\not\text{R}_3, 3\not\text{R}_5, 3\not\text{R}_6, 3\not\text{R}_9, 3\not\text{R}_{10}$

इस प्रकार से 1R_1 और 3R_9 ही सम्बन्धित हैं।

सम्बन्ध का डोमेन (Domain) और परिसर (Range)

डोमेन (Domain)–मान लीजिए R समुच्चय A से सम्बन्ध B में एक सम्बन्ध है अर्थात $R \supseteq A \times B$ तो R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों (First elements of the ordered pairs) का समुच्चय डोमेन या Dom (R) कहलाता है। अर्थात् Dom (R) = $\{x : x \in A$ तथा $(x, y) \in R\}$

परिसर (Range)–R के क्रमित युग्मों के सभी द्वितीय अवयवों (Second elements of the ordered pairs) का समुच्चय परिसर या Range (R) कहलाता है, अर्थात Range (R) = $\{y : y \in B$ तथा $(x, y) \in R\}$

टिप्पणी–Dom (R) में A के वे ही अवयव होंगे जो R द्वारा A के अवयवों से सम्बन्धित हैं।

स्पष्ट है कि Dom (R) $\subseteq$ A तथा Range (R) $\subseteq$ B

उदाहरण 1. यदि $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{x, y, z\}$ हो और $R = \{(4, x), (4, z), (5, y), (6, x)\}$ हो, तो

dom R = $\{4, 5, 6\}$ और Range R = $\{x, y, z\}$

उदाहरण 2. यदि R विवाह के सम्बन्ध को प्रकट करता हो और xRy में x पुरुष हैं एवं y महिला हैं और x, y परस्पर विवाहित हैं, तो

dom R = विवाहित पुरुषों का समुच्चय

Range R = विवाहित स्त्रियों का समुच्चय

प्रतिलोम सम्बन्ध (Inverse Relation)–मान लीजिए R, A से B में एक सम्बन्ध है, जहाँ $R = \{x, y) : x \in A, y \in B\}$ तो सम्बन्ध R, का प्रतिलोम सम्बन्ध वह समुच्चय है जो R के प्रत्येक क्रमित युग्म के अवयवों को परस्पर बदल देने से प्राप्त होता है। इसे R^{-1} से निरूपित किया जाता है।

$R^{-1} = \{(y, x) : y \in B, x \in A$ तथा $(x, y) \in R\}$

इस प्रकार $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$

स्पष्ट है कि परिसर R^{-1} = डोमेन R और डोमेन R^{-1} = परिसर R

उदाहरण 1. मानलो $A = \{x, y, z)$ तथा $B = \{1, 2, 3\}$ और $R = \{(x, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2)\}$ हो, तो

$R^{-1} = \{(2, x), (3, y), (1, z), (2, z)\}$

उदाहरण 2. यदि R 'का वर्ग है' सम्बन्ध प्रकट करता है, तो R^{-1} 'का वर्गमूल है' से तात्पर्य होता है। जैसे–

$R = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

तो, $R^{-1} = \{(1, 1), (4, 2), (9, 3), (16, 4), (25, 5)\}$

स्पष्टतः Range R^{-1} = dom R और परिसर R = dom R^{-1}

द्विआधारी सम्बन्ध (Binary Relation)

हम जानते हैं कि समुच्चय A में कोई सम्बन्ध R, $A \times A$ का उप समुच्चय होता है और इसे $A \times A$ के अवयवों के रूप में लिखा जाता है। समुच्चय A के युग्मों के रूप में प्राप्त इस सम्बन्ध को द्विआधारी सम्बन्ध कहा जाता है।

द्विआधारी सम्बन्ध के गुणधर्म

(i) सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)–जो सम्बन्ध x और y में है। यदि वही y और x में हो अर्थात् x और y के स्थान बदले जा सकें, तो सममित सम्बन्ध कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, यदि $x, y \in A$ और यदि $xRy \Rightarrow yRx$ अर्थात् $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ तो सममित सम्बन्ध होता है।

उदाहरण 1. सम्बन्ध 'बराबर' सममित सम्बन्ध है, क्योंकि यदि $x = y$, तो $y = x$।

उदाहरण 2. समतल में स्थित रेखाओं में सम्बन्ध 'लम्ब' सममित है, क्योंकि यदि रेखा x, y पर लम्ब है, तो y, x पर लम्बा है।

उदाहरण 3. सम्बन्ध $x < y$ सममित नहीं है, क्योंकि यदि $x < y$; तो $y \nless x$.

उदाहरण 4. यदि A किसी परिवार के सदस्यों का समुच्चय हो और R से 'का भाई है' सम्बन्ध प्रकट होता हो अर्थात् xRy का अर्थ x, y का भाई है, तो यह सम्बन्ध सममित नहीं है, क्योंकि y, x की बहन भी हो सकती है।

उदाहरण 5. यदि A रिक्त समुच्चय हो या एकल समुच्चय, तो A में प्रत्येक सम्बन्ध सममित है।

(ii) स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)–समुच्चय A पर सम्बन्ध R इस प्रकार हो कि A का प्रत्येक अवयव स्वयं से R द्वारा सम्बन्धित हो, तो स्वतुल्य सम्बन्ध कहलाता है। अर्थात् सभी $x \in A$ के लिए xRx.

उदाहरण 1. सम्बन्ध रेखा x, y के समान्तर है, स्वतुल्य है, क्योंकि रेखा x स्वयं के भी समान्तर होगी।

उदाहरण 2. सम्बन्ध '$x = y$' स्वतुल्य है, क्योंकि $x = x$।

उदाहरण 3. समतल में स्थित त्रिभुजों में सम्बन्ध 'सर्वांगसम' हो, तो स्वतुल्य है, क्योंकि कोई त्रिभुज स्वयं के भी सर्वांगसम होगा।

उदाहरण 4. वास्तविक संख्याओं में सम्बन्ध $x < y$ स्वतुल्य नहीं है, क्योंकि $x \nless x$.

(iii) संक्रमक सम्बन्ध (Transitive Relation)–यदि जो सम्बन्ध x और y में है और वही y और z में हो तथा वही x और z में हो जाय, तो यह संक्रमण सम्बन्ध कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, समुच्चय A पर सम्बन्ध R संक्रमक कहलाता है, यदि

xRy और $yRz \Rightarrow xRy, x, y, z \in A$.

उदाहरण 1. यदि $a < b$ और $b < c$, तो $a < c$, यह संक्रमक सम्बन्ध है।

उदाहरण 2. यदि $x = y, y = z$, तो $x = z$, अतः संक्रमक सम्बन्ध है।

उदाहरण 3. यदि A किसी परिवार के सदस्यों का समुच्चय हो और R से अभिप्राय 'का भाई है' से हो और यदि x, y का भाई है तथा y, z का भाई है, तो निश्चित ही x, z का भाई है $(x, y, z \in A)$

इस प्रकार xRy और $yRz \Rightarrow xRz$

(iv) प्रति सममित सम्बन्ध (Anti symmetric Relation)–यदि $x, y \in A$ तथा A पर परिभाषित सम्बन्ध R इस प्रकार हो कि xRy और $yRx \Rightarrow x = y$ (अर्थात् x, y में सम्बन्ध और y, x में सम्बन्ध तभी सत्य है जबकि $x = y$). तो यह प्रति सममित सम्बन्ध कहलाता है।

दूसरे शब्दों में, यदि $(a, b) \in R$ और $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$ तो प्रति सममित सम्बन्ध होता है।

उदाहरण 1. धन पूर्णांकों में सम्बन्ध 'x विभाजित करता है y को' प्रति सममित सम्बन्ध है, क्योंकि x विभाजित करता है, y को, और 'y विभाजित करता है x को' तभी सत्य है जबकि $x = y$.

उदाहरण 2. वास्तविक संख्याओं में $\geq$ या $\geq$ सम्बन्ध प्रति सममित है। क्योंकि $a@b$ और $b@a \Rightarrow a = b$

इसी प्रकार $a \geq b$ और $b \geq a \Rightarrow a = b$

(v) तत्समक सम्बन्ध (Identity Relation)—यदि समुच्चय A में सम्बन्ध R इस प्रकार हो कि प्रत्येक $x, y \in A$ लिये xRy यदि $x = y$

अर्थात् $(x, y) \in R \Rightarrow x = y$

तो R तत्समक सम्बन्ध कहलाता है। समुच्चय A में इस सम्बन्ध को I_A से निरूपित किया जाता है।

अतः $I_A = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ तथा $x = y\}$

उदाहरण 1. यदि $A = \{1, 2, 3\}$ तो

$$I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

A में तत्समक सम्बन्ध है। परन्तु सम्बन्ध $R = \{(1, 1), (3, 3)\}$ तत्समक सम्बन्ध नहीं है।

क्योंकि क्रमित युग्म (2, 2) इस सम्बन्ध में नहीं है।

उदाहरण 2. मान लीजिए $A = \{P, q, r, s\}$ में दो सम्बन्ध निम्न हैं–

$$R_1 = \{(P, P), (q, q), (r, r), (s, s)\}$$

$$R_2 = \{(P, P), (q, q), (r, r), (s, s), (P, q), (r, s), (P, r)\}$$

तो R_1 तत्समक सम्बन्ध है, परन्तु R_2 तत्समक सम्बन्ध नहीं है। क्योंकि R_2 में $(P, q), (r, s), (P, r)$ भी सम्मिलित हैं। यहाँ ध्यान देने योग्य है कि R_2 स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation) है।

तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence Relation)

वह सम्बन्ध जो सममित, स्वतुल्य और संक्रमिक हो तुल्यता सम्बन्ध कहलाता है।

अर्थात् समुच्चय A में

(i) $xRy \Rightarrow yRx, x, y \in A$

(ii) xRx सभी $x \in A$ के लिए,

(iii) xRy और $yRz \Rightarrow xRz, x, y, z \in A$.

टिप्पणी 1. यदि समुच्चय A में सबसे छोटा तुल्यता सम्बन्ध समानता (=) का है। यदि $A = \{a, b, c\}$ और $I = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ जो I का सबसे छोटा तुल्यता सम्बन्ध है।

टिप्पणी 2. समुच्चय A में सबसे बड़ा तुल्यता सम्बन्ध $A \times A$ है। यहाँ $A \times A = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$ सबसे बड़ा तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 1. सिद्ध करो कि 'समानता' (=) सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध है।

(i) यदि $x = y$ तो $y = x$ अतः सममित सम्बन्ध है।

(ii) $x = x$, स्वतुल्य सम्बन्ध है।

(iii) यदि $x = y$ और $y = z$ तो $x = z$, संक्रमण सम्बन्ध है।

क्योंकि इसमें तीनों सम्बन्ध हैं, अतः यह तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 2. दिखाओ कि समतल में स्थित त्रिभुजों में 'सर्वांगसम सम्बन्ध' तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : (i) यदि त्रिभुज $x \in R$, त्रिभुज $y \in R$ के सर्वांगसम हो, तो $y \equiv x$, अर्थात् $xRy = yRx$.

(ii) चूँकि त्रिभुज $x \in R$, त्रिभुज $y \in R$ के सर्वांगसम हो, तो $y \equiv x$, अर्थात् $xRy \Rightarrow yRx$

(iii) यदि $x, y, z \in R$ और यदि $x \equiv y$ तथा $y \equiv z$ तो स्पष्ट है कि $x \equiv z$, अतः सम्बन्ध संक्रमक है।

इस प्रकार सर्वांगसम सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध है।

उदाहरण 3. यदि x वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो, तो सिद्ध कीजिए कि सम्बन्ध $R = \{(a, b) \mid a \in x, b \in x$ तथा $a = b\}$ एक तुल्यता सम्बन्ध है।

हल : माना $a, b \in x$ तब $(a, b) \in R$ यदि $a = b$

(i) सम्बन्ध R सममित है :

$\because a = b \Rightarrow b = a$

अतः दिये हुये प्रतिबन्ध से, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

अतः R सम्बन्ध सममित है।

(ii) सम्बन्ध R स्वतुल्य है–

$\because a = a$

तब दिये सम्बन्ध से $(a, a) \in R$

अतः सम्बन्ध R स्वतुल्य है।

(iii) सम्बन्ध R संक्रमक है–

माना $a, b, c \in x$ तब $a = b, b = c$

$\Rightarrow a = c$

दिये हुए सम्बन्ध से $(a, b) \in R$ तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

अतः सम्बन्ध R संक्रमक है।

दिया समुच्चय R, सममित, स्वतुल्य तथा संक्रमक है।

अतः सम्बन्ध R एक तुल्यता सम्बन्ध है।

अभ्यास-प्रश्न

1. पूर्णांकों में सम्बन्ध R इस प्रकार परिभाषित है–
   $xRy \Leftrightarrow x, y$ का वर्ग है;

बताओ निम्नलिखित में कौन-से कथन सत्य है ?

(i) $4R_2$ (ii) $(-2) R_4$

(iii) $3R_9$ (iv) $9R_3$

उत्तर—(i), (iv)

2. निम्नलिखित सम्बन्धों के डोमेन एवं रेंज लिखो—

(i) $\{(-2, 1), (-1, 0\}, (0, -1)\}$

(ii) $\{(1, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 16), ...\}$

उत्तर—(i) $\{-2, -1, 0\}, \{1, 0, -1\}$

(ii) $\{1, 2, 3, 4, ...\}, \{1, 4, 16, ...\}$

3. दिखाओ कि निम्नलिखित सम्बन्ध संक्रमक नहीं है—

'x, y से घृणा करता है' और 'y, z से घृणा करता है'।

जहाँ कि x, y, z पृथ्वी पर व्यक्तियों के समुच्चय में अवयव है।

4. दिखाओ कि समतल में स्थित सरल रेखाओं में 'समान्तर' सम्बन्ध तुल्यता सम्बन्ध है।

5. दिखाओ कि धन पूर्णांकों में सम्बन्ध 'से बड़ा है' संक्रमक है, किन्तु न तो स्वतुल्य है और न सममित।

6. 'तुल्यता सम्बन्ध' की परिभाषा दीजिए। बताइये कि निम्नलिखित सम्बन्ध में कौन-से तुल्यता सम्बन्ध हैं और क्यों ?

(i) समतल में स्थित त्रिभुजों में समरूप सम्बन्ध।

(ii) पूर्णांकों के लिए सम्बन्ध 'का वर्ग' है।

(iii) समतल में स्थित सरल रेखाओं के लिए लम्ब सम्बन्ध।

फलन
(FUNCTION)

X का Y पर फलन $X \times Y$ में एक ऐसा सम्बन्ध होता है कि सम्बन्ध के कोई दो क्रमित युग्मों का पहला अवयव एक ही अवयव नहीं होता।

$\{(1, 3), (2, 4), (1, 5)\}$ एक फलन नहीं है क्योंकि $(1, 3)$ और $(1, 5)$ दो क्रमित युग्मों का एक ही प्रथम अवयव 1 है।

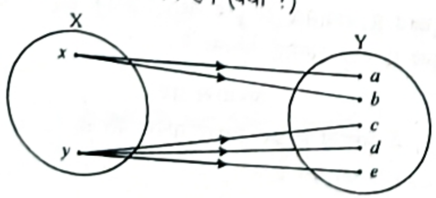
संलग्न तीर आरेख में,

क्रमित-युग्मों का समुच्चय यह है

$\{(x, a), (x, b), (y, c), (y, d), (y, e)\}$

यह फलन नहीं है (क्यों ?)

$\{(3, 4), (2, 4), 1, 3\}$ एक फलन है। (क्यों ?)



यदि X और Y दो दिए हुए समुच्चय हों और यदि किसी दिये हुए नियम या संक्रिया f से प्रत्येक X $(\in X)$ के संगत एक अद्वितीय अवयव Y $(\in Y)$ निर्दिष्ट हो सके तो इस संगतता को जिसे f से प्रकट करते हैं, X का Y पर प्रतिचित्रण या फलन कहते हैं।

दूसरे शब्दों में, समुच्चय X का समुच्चय Y में प्रतिचित्रण वह संगतता अथवा सम्बन्ध है जिसके द्वारा समुच्चय X का प्रत्येक अवयव समुच्चय Y के एक अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित होता है।

उदाहरण 1. $\{(0, 2), (2, 2)\}$ एक फलन है किन्तु $\{(2, 0); (2, 2)\}$ एक फलन नहीं है क्योंकि इस स्थिति में X का अवयव 2 डोमेन में दो बार आया है अर्थात् दो क्रमित युग्मों का पहला अवयव एक ही है।

उदाहरण 2. $\{(2, 3); (2, 4), (3, 5)\}$ एक फलन नहीं है क्योंकि 2 डोमेन में दो बार आया है।

प्रतिचित्रण का संकेतन—

यदि प्रतिचित्रण या फलन के नियम को f से सूचित करें तो प्रतीक रूप में इसे इस प्रकार लिखते हैं—

$$f : X \to Y$$

और इसे इस प्रकार पढ़ते हैं "f, Y पर X का फलन है।"

यदि $f(a) = x, f(b) = x, f(c) = z$ तो

f, a को x पर प्रतिचित्रण करता है, b को x पर प्रतिचित्रण करता है, c को z पर प्रतिचित्रण करता है। संकेत रूप में इसे इस प्रकार लिखते हैं—

$$f = a \to x, b \to x, c \to z$$

उदाहरण 1. यदि फलन f प्रत्येक वास्तविक संख्या x के वर्ग को निर्दिष्ट करें तो—

$$f(x) = x^2$$

उदाहरण 2. यदि f भारत के प्रत्येक राज्य को उसकी राजधानी से निर्दिष्ट करे, तो

f : उत्तर प्रदेश → लखनऊ, राजस्थान → जयपुर, बिहार → पटना।

किन्तु f : पंजाब → चण्डीगढ़, हरियाणा → चण्डीगढ़ (क्यों ?) डोमेन (प्रान्त) और रेंज (परिसर) (Domain and Range)।

डोमेन (प्रान्त)—X में x अवयवों का समुच्चय जिनके लिए y में $f(x)$ का अस्तित्व है, डोमेन कहलाता है जिन पर फलन की संक्रिया होती है।

रेंज—X में x के लिए Y में $f(x)$ के संगत अवयवों का समुच्चय रेंज कहलाता है।

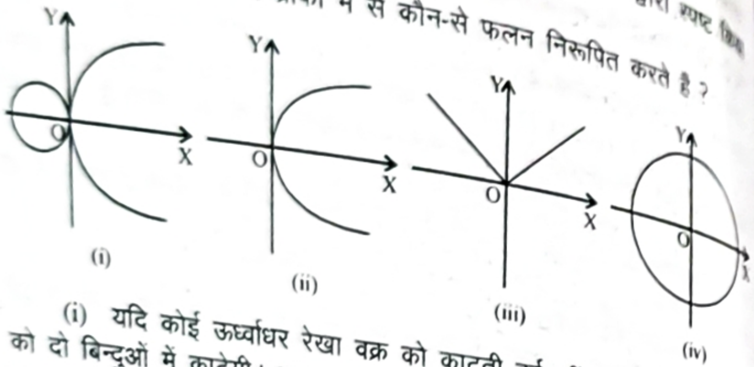
उदाहरण 1. यदि R से विवाह का सम्बन्ध प्रकट होता है और xRy का अर्थ है कि x पुरुष y स्त्री से विवाहित है तो R का डोमेन विवाहित पुरुषों का समुच्चय और R का परिसर विवाहित स्त्रियों का समुच्चय है।

उदाहरण 2. फलन $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \ldots\}$ में $\{a, a_2, a_3 \ldots\}$ डोमेन और $\{b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots\}$ परिसर है।

ज्यामितीय आकृतियों में फलन

ज्यामितीय आकृतियों के लिये प्रक्रिया को निम्न आकृतियों द्वारा स्पष्ट किया जा रहा है–

उदाहरण–निम्नांकित ग्राफों में से कौन-से फलन निरूपित करते है ?



(i) यदि कोई ऊर्ध्वाधर रेखा वक्र को काटती हुई खींची जाय, तो वह ग्राफ को दो बिन्दुओं में काटेगी। अब x के एक ही मान के लिए $f(x)$ या y के दो मान प्राप्त होंगे अर्थात् दो प्रतिबिम्ब प्राप्त होंगे। अतः यह वक्र फलन निरूपित नहीं करता है। फलन के लिए y का अद्वितीय होना आवश्यक है।

(ii) यह भी (i) की भाँति फलन नहीं है।

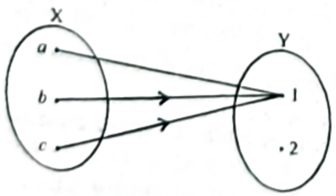
(iii) ग्राफ को काटने वाली कोई ऊर्ध्वाधर रेखा वक्र को केवल एक बिन्दु पर काटेगी। अतः x के एक मान से $f(x)$ का भी एक ही मान प्राप्त होगा। अतः यह एक फलन निरूपित करता है।

(iv) (i) की भाँति फलन निरूपित नहीं करता है।

प्रतिचित्रण के प्रकार

(1) अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण (In to Mapping)–यदि समुच्चय Y में कम से कम एक अवयव ऐसा हो जो कि समुच्चय X के किसी भी अवयव का प्रतिबिम्ब न हो, तो कहते हैं कि फलन f के अन्तर्गत Y में X को f चित्रित करता है और प्रतिचित्रण अन्तर्क्षेपी कहलाता है। जैसा कि आकृति में है जिसमें Y का एक अवयव 2, X के बिन्दु से नहीं मिलाया गया है।

अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण में यदि $X \in X$ तो $\{f(x)\} \subset Y$ अर्थात् $f(x)$, y का उचित उपसमुच्चय होता है।



(2) **आच्छादक प्रतिचित्रण** (Onto or Subjective Mapping)–यदि f मैपिंग ... हो कि Y का प्रत्येक अवयव X के कम से कम एक अवयव का f प्रतिबिम्ब ... हो, तो कहते हैं कि Y को X से f आच्छादित करता है और इसे आच्छादक प्रतिचित्रण कहते हैं। जैसा कि दी हुई आकृति में है जिसमें Y का प्रत्येक अवयव X के किसी न किसी बिन्दु से मिलाया गया है। आच्छादक प्रतिचित्रण में $\{f(x)\} = Y$.

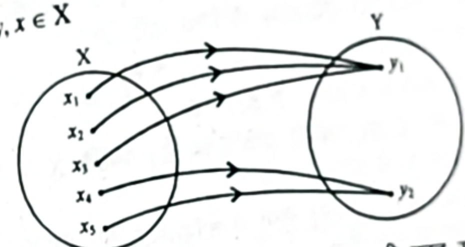
उपर्युक्त दोनों प्रतिचित्रण की परिभाषा अब इस प्रकार भी दी जा सकती है–

$f: X \to Y$ प्रतिचित्रण को आच्छादक (ऑंटू onto) प्रतिचित्रण कहा जाता है यदि

$\{f(x)\} = y, x \in X$

और इसे अन्तर्क्षेपी (इंटू into) कहा जाता है, यदि

$\{f(x)\} \subset y, x \in X$



इन प्रतिचित्रणों को निम्नलिखित उदाहरण से अच्छी तरह समझा जा सकता है–मानलो किसी कक्षा के कमरे में विद्यार्थियों का समुच्चय X है और उनके बैठने के लिए कुर्सियों का समुच्चय Y है। यदि कुर्सियों की संख्या विद्यार्थियों की संख्या के बराबर है तो प्रत्येक विद्यार्थी एक कुर्सी पर बैठेगा और प्रत्येक कुर्सी एक विद्यार्थी से सम्बन्धित होगी। यदि कुर्सियों की संख्या विद्यार्थियों की संख्या से कम है तो कुछ स्थितियों में दो विद्यार्थियों से सम्बन्धित एक ही कुर्सी होगी। दोनों ही स्थितियों में Y (कुर्सियों) पर X (विद्यार्थियों) का प्रतिचित्रण आच्छादक (onto) है।

किन्तु यदि कुर्सियों की संख्या (Y के अवयव) विद्यार्थी (X के अवयव) की संख्या से अधिक हो तो कुछ कुर्सियाँ खाली पड़ी रहेंगी और किसी भी विद्यार्थी से सम्बन्धित नहीं होंगी। इस स्थिति में X (विद्यार्थियों) का Y (कुर्सियों) पर प्रतिचित्रण अन्तर्क्षेपी है।

उदाहरण–फलन $f = \{x, y\} : y = |x|, x$ एक पूर्णांक है। आच्छादक प्रतिचित्रण है क्योंकि y के सभी अवयव धन पूर्णांक हैं। और प्रत्येक पूर्णांक का निरपेक्ष मान $|x|$ एक धन पूर्णांक होता है, अतः प्रत्येक धन पूर्णांक किसी न किसी पूर्णांक से सम्बन्धित है। इसी प्रकार Y के सभी अवयव X के अवयवों के प्रतिबिम्ब है।

एकैकी संगतता (One-one correspondence)–यदि समुच्चय A के प्रत्येक अवयव के संगत समुच्चय B का केवल एक और एक ही अवयव हो और B के प्रत्येक अवयव के संगत A का केवल एक और एक ही अवयव हो, तो उनके इस सम्बन्ध को एकैकी संगतता कहते हैं। प्रतीक $a \leftrightarrow b$ का अर्थ है कि a के संगत b है और b के संगत a है।

$A \leftrightarrow B\}$ समुच्चय A और B के अवयव एकैकी संगतता में है।

$a \leftrightarrow$ कलम}
C $\leftrightarrow$ चाकू}
$i \leftrightarrow$ पैर}
$o \leftrightarrow$ बिल्ली}
$u \leftrightarrow$ पेन्सिल}

A का अवयव I; B का अवयव पैर के संगत है। B का अवयव 'बिल्ली' A के अवयव 'o' के संगत है। इस परिभाषा से स्पष्ट है कि एकैकी संगतता के दो परिमित समुच्चयों की संख्या एक होती है। परिमित समुच्चयों के अवयवों की संख्या एक होती है।

(3) एकैकी प्रतिचित्रण (One-one Mapping)—यदि प्रतिचित्रण $f : X \to y$ ऐसा हो कि सम्बन्ध

$$f(x_1) = f(x_2)\ x_1 = x_2;\ \text{जहाँ}\ x_1, x_2 \in X$$

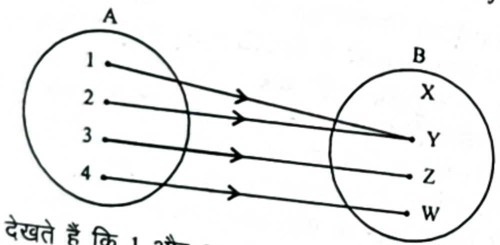
तो कहते हैं कि f एकैकी प्रतिचित्रण है। यहाँ X के भिन्न-भिन्न अवयवों के Y में भिन्न-भिन्न प्रतिबिम्ब होते हैं। उदाहरण के लिये यदि

$$X = \{a, b, c,\}, y = \{3, 4, 5, 6\}$$

और $f(a) = 4, f(b) = 3, f(c) = 6$

तो यह X का Y पर एकैकी प्रतिचित्रण है। क्योंकि X के किन्हीं दो भिन्न अवयवों के प्रतिबिम्ब Y में एक ही नहीं हैं।

उदाहरण—A = {1, 2, 3, 4} तथा B = {x, y, z, w} तथा $f = A \to B$ चित्र द्वारा निम्नवत् दिखाया गया है—



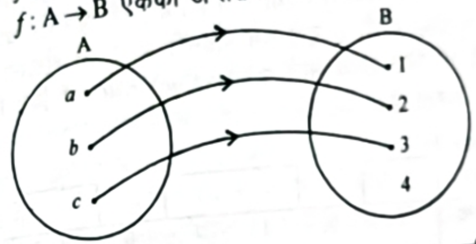
यहाँ हम देखते हैं कि 1 और 2 बराबर नहीं हैं ($1 \neq 2$) परन्तु $f(1) = f(2)$ अर्थात् $1 \neq 2 \Rightarrow f(1) = f(2)$, अतः यह एकैकी प्रतिबिम्ब नहीं है।

बहु-एक प्रतिचित्रण (Many-one Mapping)—यदि प्रतिचित्रण $f : X \to Y \Rightarrow Y$ ऐसा हो कि X के भिन्न-भिन्न दो या दो से अधिक अवयवों के Y में एक ही प्रतिबिम्ब हों तो उसे बहु-एक प्रतिचित्रण कहते हैं। यहाँ यद्यपि $x_1 \neq x_2$ फिर भी $f(x_1) = f(x_2)$ हो जाता है।

उदाहरण—A = {1, 2, 3, 4} तथा B = {a, b, c} यदि प्रतिचित्रण $f : A \to B$ इसी प्रकार है कि $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = c$, तो यह बहु-एक प्रतिचित्रण हुआ, क्योंकि $3 \neq 4 \Rightarrow f(3) = f(4)$ एकैकी अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण (One-one into or Injective Mapping) यदि कोई प्रतिचित्रण अंतर्क्षेपी भी हो और एकैकी भी हो तो उसे एकैकी अंतर्क्षेपी प्रतिचित्रण कहते हैं।

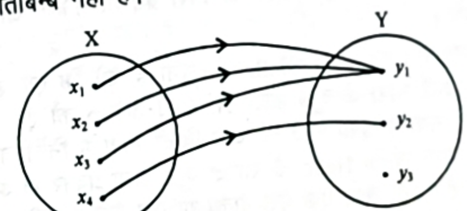
प्रतीकात्मक भाषा में $f : X \to Y$ एकैक अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण होगा यदि $f(X) \subset y$ तथा $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ \forall\ x_1\ x_2 \in A$.

उदाहरण— A = {a, b, c}, B = {1, 2, 3, 4}
जहाँ $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$
तो $f : A \to B$ एकैकी अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण है।

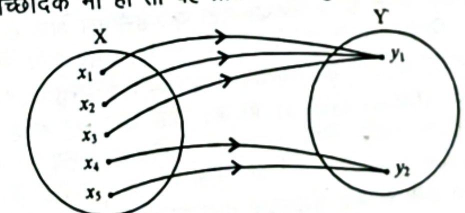


बहु-एक अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण (Many-one into Mapping)—प्रतिचित्रण बहु-एक और अन्तर्क्षेपी भी हो, तो बहु-एक अन्तर्क्षेपी कहलाता है।

जैसे यदि $f(x_1) = f(x_2), f(x_3) = y_1, f(x_4) = y_2$ तो यह बहु-एक अन्तर्क्षेपी है। y_3 किसी का प्रतिबिम्ब नहीं है।



बहु-एक आच्छादक प्रतिचित्रण (Many-one onto mapping)—प्रतिचित्रण बहु-एक हो और आच्छादक भी हो तो वह प्रतिचित्रण बहु-एक आच्छादक कहलाता है।



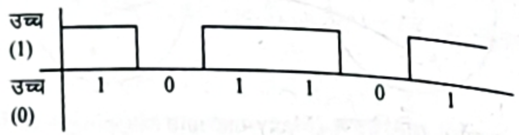
उदाहरण—यदि x = {a, b, c, d}, y = {1, 2, 3, 4} तो यह X का Y पर बहु-एक $f(a)\ 1, f(b) = 2, f = (c) = 2, f(d) = 3$ प्रतिचित्रण है। यह X का Y पर आच्छादक प्रतिचित्रण है। अतः यह X का Y पर बहु-एक आच्छादक प्रतिचित्रण है।

बुलियन बीजगणित एवं विभिन्न आधारों के साथ संख्या का प्रारम्भिक ज्ञान

बाइनरी डेटा

'बाइनरी' (Binary) का अर्थ होता है दो (Two)। बाइनरी अंक प्रणाली में मात्र दो अंक होते हैं; 'o' तथा 'i'। इन्हें बाइनरी अंक (Binary Numbers) या बाइनरी बिट (Binary Bits) भी कहा जाता है।

कम्प्यूटर में डाटा को डिजिटल अथवा बाइनरी सिग्नलों के रूप में प्रोसेस किया जाता है। बाइनरी सिग्नल की अवस्था को पेपर पर प्रदर्शित करने के लिए बाइनरी अंक प्रणाली का विकास किया गया हैं। बाइनरी सिग्नल, धारा के उच्च तथा निम्न मान की शृंखला होती है इसे हम बाइनरी अंकों की शृंखला में प्रदर्शित कर सकते हैं जिसमें '*i*' बिट उच्च मान (high value) तथा '*o*' बिट निम्न मान (low value) प्रदर्शित करता है।



ऊपर बनाए गए बाइनरी सिग्नल को हम 101101 से प्रदर्शित कर सकते हैं। इस प्रकार डाटा का बड़े से बड़ा भाग अथवा छोटे से छोटा तत्व इन्हीं दोनों बाइनरी अंकों '*o*' तथा '*i*' की क्रमबद्ध शृंखला के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है, जैसे 11000101 आदि।

मान लीजिए हमें एक शब्द **'Hello'** लिखना है, जो कि एक डेटा आइटम है। इस शब्द को अंग्रेजी भाषा के कुछ अक्षर H, e, l, l तथा o को एक क्रमबद्ध शृंखला से प्रदर्शित किया गया है, इसी शब्द को यदि हिन्दी भाषा में निरुपित किया जाए तो 'हैलो' लिखा जायेगा जोकि Hello के सापेक्ष कुछ अन्य प्रकार के अक्षरों ह, ल की क्रमबद्ध शृंखला है। इसी तरह एक पूरा वाक्य या पूरा पेज अंग्रेजी भाषा के A से Z तक के ऐल्फाबेट की अलग-अलग क्रमबद्ध शृंखला से प्रदर्शित किया जा सकता है।

हम शाब्दिक डेटा को किसी भी मानवीय भाषा के अक्षरों के सैट, जैसे (A-Z), (अ-ज्ञ) से प्रदर्शित करते हैं, सांख्यिकी डेटा को डेसीमल अंक 0 – 9 से प्रदर्शित करते हैं तथा चित्रों को किसी भी प्रकार से पेपर पर बना सकते हैं अर्थात् अलग-अलग स्वरूप के डेटा के लिए हमारे पास डेटा के प्रस्तुतीकरण के लिए मात्र बाइनरी व्यवस्था (Binary System) ही है। चाहे डेटा का कोई भी स्वरूप हो (सांख्यिक, शाब्दिक, ध्वनि, चित्र, चलचित्र) डिजिटल कम्प्यूटर में वह बाइनरी सिग्नलों की शृंखला में रूपान्तरित किया जाता है और उस डेटा को बाइनरी अंकों (0, 1) के विभिन्न क्रमों से बनी शृंखलाओं द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। जैसे–4 को 100 से, 6 को 110 से तथा A को 1000001 से निरूपित किया जा सकता है।

डेसीमल अंक प्रणाली (Decimal Number System)

डेसीमल अंक प्रणाली से आप भली-भाँति परिचित हैं। यह वही अंक प्रणाली है जिसका प्रयोग आप अपने दैनिक जीवन में करते हैं। इस अंक प्रणाली में कुल 10 अलग-अलग अंक अथवा डिजिट (digits) होते हैं जो कि इस प्रकार हैं–0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9। कोई भी बड़ी से बड़ी संख्या इन 10 अंकों की शृंखला से ही बनाई जा सकती है; जैसे–9999; 12357,....... आदि। 10 अंक होने के कारण इसका नाम डेसीमल अंक प्रणाली (Decimal Number System) रखा गया।

बेस अथवा रेडिक्स (Base or Radix)

प्रत्येक अंक प्रणाली (Number system) का अपना एक बेस (Base) अथवा

रेडिक्स (Radix) होता है, जिसका मान उस अंक प्रणाली के कुल अंकों (digits) के बराबर होता है। जैसे–डेसीमल अंक प्रणाली में कुल दस अंक (0 से 9 तक) हैं। अतः डेसीमल अंक प्रणाली का बेस 10 होगा।

डेसीमल अंक प्रणाली में एक संख्या कितनी भी बड़ी हो सकती है और इन 10 अंकों में से कोई भी अंक उस संख्या के किसी भी स्थान (Position) पर हो सकता है।

प्लेस वैल्यू अथवा स्थान का मान (Place Value)

एक संख्या में अनेक स्थान होते हैं और प्रत्येक स्थान पर एक अंक उपस्थित रहता है। किसी भी संख्या के प्रत्येक स्थान का मान निकाला जा सकता है, जिसे उस स्थान की प्लेस वैल्यू (Place Value) कहते हैं। प्रत्येक स्थान की प्लेस वैल्यू निकालकर उनका योग करने से हमें वह संख्या प्राप्त होती है। इसे हम एक उदाहरण द्वारा समझते हैं। संख्या 562 को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं–$562 = 500 + 60 + 2$

इस संख्या में '2' अंक बायें से पहले स्थान पर है, '6' दूसरे स्थान पर तथा '5' तीसरे स्थान पर। इस उदाहरण में संख्या के बायें से पहले स्थान की प्लेस वैल्यू (Place value) 2 है, दूसरे स्थान की 60 तथा तीसरे स्थान की 500 है।

प्लेस वैल्यू ज्ञात करना–एक संख्या में किसी पोजीशन विशेष पर स्थित अंक की प्लेस वैल्यू उस अंक को (रेडिक्स)^n से गुणा करके ज्ञात की जा सकती है। हमें अंक पता है, रेडिक्स पता है, यदि n का मान ज्ञात हो जाए तो प्लेस वैल्यू ज्ञात की जा सकती है।

'n' रेडिक्स की पावर यानि घात है जो उस अंक की पोजीशन पर निर्भर करती है। किसी अंक की पोजीशन, संख्या के बायें (Left) सिरे से देखी जाती है। बायें सिरे से अंक की जो स्थिति होगी n का मान उससे 1 कम होगा; जैसे यदि अंक की स्थिति तीसरी है तो n का मान 2 होगा, यदि स्थिति चौथी है तो n का मान 3 होगा, यदि पहली स्थिति है तो n का मान 0 होगा।

उदाहरण–321 संख्या में प्रत्येक अंक की प्लेस वैल्यू बताइये।

हल : प्लेस वैल्यू = A × (बेस)^n

यहाँ A = अंक

बेस = 10

$n = x - 1$

x = A की संख्या में स्थिति

1 की प्लेस वैल्यू = $1 \times 10^{1-1} = 1 \times 10^0 = 1$

2 की प्लेस वैल्यू = $2 \times 10^{2-1} = 2 \times 10^1 = 20$

3 की प्लेस वैल्यू = $3 \times 10^{3-1} = 3 \times 10^2 = 300$

इस प्रकार हम एक संख्या को उसकी प्रत्येक अंक की प्लेस वैल्यू में विभाजित कर सकते हैं।

$$321 = 300 + 20 + 1$$

इसी प्रकार $4762 = 4000 + 700 + 60 + 2$

$$= 4 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

बाइनरी अंक प्रणाली (Binary number system)–डिजिटल कम्प्यूटर में डाटा के प्रस्तुतीकरण के लिए बाइनरी अंक प्रणाली विकसित की गई है जिसमें डाटा को मात्र 2 बाइनरी अंक (0, 1) की शृंखला द्वारा प्रस्तुत किया जाता है।

बेस अथवा रेडिक्स (Base or Radix)–बाइनरी अंक प्रणाली में कुल अंकों की संख्या मात्र 2 है। प्रत्येक बाइनरी संख्या मात्र इन्हीं दो अंकों (0 तथा 1) की शृंखला से बनी होती है। अतः बाइनरी अंक प्रणाली का बेस अथवा रेडिक्स 2 होता है।

प्लेस वैल्यू (Place Value)–किसी भी अंक की प्लेस वैल्यू निम्न तीन बातों पर निर्भर करती है–

1. अंक (Digit)
2. अंक का संख्या में स्थान (Position)
3. संख्या का बेस अथवा रेडिक्स (Radix)।

उपर्युक्त तीनों बातों का ज्ञान होने पर इनका मान समीकरण में रखकर हम संख्या के प्रत्येक अंक की प्लेस वैल्यू ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 101_2 अंक की प्लेस वैल्यू ज्ञात कीजिए।

हल : समीकरण में संख्या 101_2 का मान रखने पर

$$101_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 4 + 0 + 1 \quad \text{(प्लेस वैल्यू)}$$

योग करने पर $4 + 0 + 1 = 5_{10}$

संख्या 101_2 संख्या 5_{10} के सापेक्ष है।

बाइनरी योग क्रिया (Binary addition)–बाइनरी योग क्रिया करने की विधि डेसीमल योग क्रिया की तरह ही है। बाइनरी अंक प्रणाली में मात्र दो ही अंक (0, 1), होते हैं, अतः योग क्रिया (addition) में मात्र चार सम्भावनाएँ होती हैं।

1. यदि 0 को 0 से जोड़ा जाए तो हमें 0 प्राप्त होगा।
$$0 + 0 = 0$$
2. यदि 0 को 1 से जोड़ा जाए तो हमें 01 प्राप्त होगा।
$$0 + 1 = 1$$
3. यदि 1 को 0 से जोड़ा जाए तो भी हमें 1 ही प्राप्त होगा।
$$1 + 0 = 1$$
4. यदि 1 को 1 से जोड़ा जाए तो हमें 0 के साथ हासिल (Carry) 1 प्राप्त होगा।

$$1 + 1 = 10$$
$$\downarrow$$
हासिल (Carry)

जिस प्रकार डेसीमल अंक 9 + 1 जोड़ने पर हमें 10 प्राप्त होता है तो योग 0 माना जाता है तथा 1 हासिल (Carry) के रूप में अगले अंक के साथ जोड़ दिया जाता है, ठीक उसी प्रकार बाइनरी योग में प्राप्त हासिल अगले अंक के साथ जोड़ दिया जाता है।

उदाहरण–

$$\begin{array}{r} 101101 \\ +\ 100111 \\ \hline ? \\ \hline \end{array}$$

हल :

$$\begin{array}{r} 101101 \\ +\ 100111 \\ \hline 1010100 \\ \hline \end{array}$$

बाइनरी घटा क्रिया (Binary Subtraction)–बाइनरी घटा की क्रिया में भी कुल चार सम्भावनाएँ होती हैं, अतः यहाँ बाइनरी घटा के चार नियम होते हैं–

1. यदि 0 में से 0 को घटाया जाए तो 0 प्राप्त होगा।
$$0 - 0 = 0$$
2. यदि 1 में से 0 घटाया जाए तो 1 प्राप्त होगा।
$$1 - 0 = 1$$
3. यदि 1 में से 1 घटाया जाए तो 0 प्राप्त होगा।
$$1 - 1 = 0$$
4. यदि 0 में से 1 घटाया जाए तो 1 प्राप्त होगा (0 अपने से पहले अंक से 1 उधार (Borrow) लेगा अतः (0 के स्थान पर 10 हो जाएगा)।

$$10 - 1 = 1$$
$$\downarrow$$
उधार (borrow)

उदाहरण 1. $1000_2 - 10_2 = ?$

हल :

$$\begin{array}{cccc} \text{IV} & \text{III} & \text{II} & \text{I} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & - & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

I $\quad 0 - 0 = 0$

II $\quad 0 - 1 = 10 - 1 = 1$

III $\quad 1 - 0 = 1$

उदाहरण 2.

$$\begin{array}{r} 1110001 \\ -\ 111001 \\ \hline ? \\ \hline \end{array}$$

हल :

$$\begin{array}{r} 1110001 \\ -\ 111001 \\ \hline 111000 \\ \hline \end{array}$$

24

सांख्यिकीय आँकड़ों का ग्राफीय निरूपण, केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण एवं सह-सम्बन्ध गुणांक का माप

[GRAPHIC REPRESENTATION, CENTRAL TENDENCY AND MEASUREMENT OF COEFFICIENT OF CORRELATION OF STATISTICAL DATA]

ग्राफीय निरूपण
(GRAPHIC REPRESENTATION)

सांख्यिकी समंक विशाल और जटिल होते हैं जिन्हें सामान्य व्यक्ति कठिनता से ही समझ पाता है। सांख्यिकी शास्त्र उन्हें सरल बनाने के लिए कई विधियाँ अपनाता है। सामग्री या समंकों का प्रदर्शन वर्गीकरण व सारणीयन द्वारा व्यवस्थित ढंग से किया जाता है। किन्तु इन रीतियों से समंकों की विशेषताओं को ठीक ढंग से प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है। इसलिए समंकों तथा आँकड़ों को रेखाचित्र, बिन्दु-रेखीय चित्रों तथा आलेखनों का प्रयोग किया जाता है। कोई भी व्यक्ति समंकों को चित्रों की सहायता से सरलता से समझ सकता है और तुलना कर सकता है।

इन रेखाचित्रों का उपयोग समयानुसार तथा स्थानानुसार श्रेणियों में विशेष रूप से होता है।

ग्राफीय निरूपण के लाभ तथा उपयोगिता

ग्राफीय निरूपण के निम्नलिखित लाभ हैं—

1. रुचिकर, आकर्षक—ग्राफीय निरूपण आकर्षक; रुचिकर और प्रभावशाली होते हैं। ग्राफीय चित्र समंकों की सामग्री से अधिक आकर्षक होता है। इसे सुन्दर ढंग से बनाकर और भी आकर्षक बनाया जा सकता है।

2. दृष्टि में स्पष्ट—इसमें आँकड़ों को एक ही दृष्टि से समझा जा सकता है। वर्गीकरण और सारणीयन में यह सम्बन्ध नहीं है क्योंकि उनका अध्ययन गहनता से करने के बाद ही कोई निष्कर्ष निकाला जा सकता है। ग्राफीय निरूपण में परिवर्तन की दिशा और गति एक दृष्टि में स्पष्ट हो जाती है।

3. श्रम एवं समय की बचत—ग्राफीय निरूपण से समय और श्रम दोनों की बचत होती है। सांख्यिकी की अन्य विधियों की अपेक्षा इसमें समय और श्रम दोनों ही कम लगते हैं। जैसे तापक्रम के आरेख को देखकर क्षणभर में रोगी की तापक्रम की दशा-परिवर्तन का अनुमान लगाया जा सकता है।

4. तुलनात्मक अध्ययन में—ग्राफों की सहायता से दो या अधिक प्रकार के समंकों की तुलना सरलता से की जा सकती है। एक ही दृष्टि में विभिन्न प्रकार के समंकों के परिवर्तन की गति स्पष्ट हो जाती है।

5. सरल एवं स्थायी—इसकी सहायता से अव्यवस्थित समंक सरल, सुबोध और जन साधारण के लिए बोधगम्य हो जाते हैं। मानवीय मस्तिष्क पर इसका स्थायी प्रभाव होता है। आँकड़े शीघ्र भूले जा सकते हैं, किन्तु ग्राफीय प्रदर्शन की छाप मस्तिष्क पर स्थायी रहती है।

ग्राफिक निरूपण के दोष (Defects of Graphic Representation)

ग्राफिक निरूपण के लाभों के साथ ही दोष भी होते हैं, वे निम्नलिखित हैं—

1. कम महत्त्व—बहुत से मनुष्य ग्राफीय निरूपण के आदी नहीं होते हैं। वे इसको अधिक महत्त्व नहीं देते हैं।

2. भ्रमात्मक प्रभाव—प्रायः इसके प्रदर्शन से भ्रमात्मक प्रभाव भी पड़ते हैं। मापदण्ड में थोड़ा परिवर्तन कर देने पर चित्रावली के आकार में बहुत अन्तर पड़ जाता है। विभिन्न मापदण्डों से समंकों को विभिन्न ढंगों से प्रस्तुत किया जा सकता है। इस प्रकार इसका दुरुपयोग होना भी सम्भव है।

3. निश्चितता का अभाव—ग्राफीय निरूपण में निश्चितता का अभाव रहता है। इनकी सूचनायें भी अपर्याप्त होती हैं।

ग्राफिक्स की रचना (Construction of a Graph)

प्रमुखतः रेखाचित्रों की रचना ग्राफ पेपर पर की जाती है। ग्राफ पेपर पर क्षैतिज तथा ऊर्ध्व दिशा में, एक-दूसरे को समकोण पर काटते हुए, रेखाएँ बनी होती हैं जिनके बीच की दूरी 0.1 सेमी होती है। इन रेखाओं में से कुछ गहरे रंग में होती हैं जिनके बीच की दूरी 1 सेमी होती है।

ग्राफ पेपर पर x-अक्ष तथा y-अक्ष का निर्धारण आँकड़ों के आधार पर किया जाता है। इनके कटान बिन्दु को मूल बिन्दु कहते हैं। क्योंकि सांख्यिकी रेखाचित्रों का कोई मान ऐसा नहीं होता है जिसके लिए भुजांक (abscissac) तथा कोटि अंक (ordinate) के मान ऋण हो, अतः मूल बिन्दु को पृष्ठ के नीचे के बायें सिरे पर लेते हैं। इन आलेखों में वर्गों को x-अक्ष के अनुदिश और बारम्बारताओं (frequencies) को y-अक्ष के अनुदिश प्रदर्शित करते हैं अर्थात् वर्ग-अन्तरालों को भुजांक या भुज एवं बारम्बारताओं को कोटि-अंक मानकर आलेखन करते हैं।

इन आलेखनों का प्रमुख अंग पैमाना (Scale) है। यह इस प्रकार मानना चाहिए कि सम्पूर्ण सामग्री उस गफ पेपर पर सरलता से अंकित हो सके। आलेखन करते समय वर्ग-अंतरालों के साथ अलग और बारम्बारताओं के साथ अलग से पैमाने अंकित किये जाने चाहिए जिससे माप पूर्णतया स्पष्ट हो सके।

ग्राफिक्स के प्रकार (Kinds of Graphs)

ग्राफिक्स निम्न प्रकार के होते हैं—

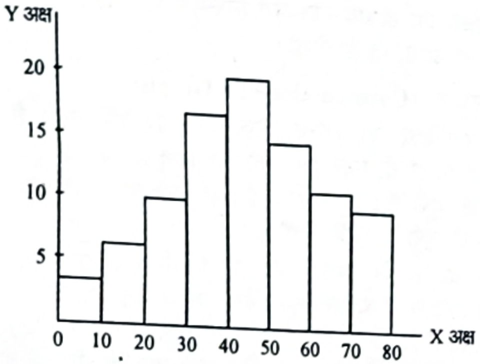
1. आयत चित्र (Histograms)—ये बारम्बारता सारणी के अनुसार बनाये जाते हैं। इस प्रकार के आलेखनों में वर्ग अन्तराल समान रहते हैं। इनको x-अक्ष पर अंकित करते हैं। प्रत्येक वर्ग-अन्तराल पर एक आयत बनाते हैं। इसका क्षेत्रफल उस वर्ग की बारम्बारता को प्रदर्शित करता है। पहले वर्ग अन्तराल को x-अक्ष पर लेते हैं और उसे एक भुजा मानकर एक ऐसा आयत बनाते हैं जिसकी ऊँचाई संगत बारम्बारता के बराबर हो। उसके निकट ही x-अक्ष पर दूसरा वर्ग अन्तराल लिया जाता है और उसके ऊपर दूसरे वर्ग की संगत बारम्बारता के बराबर ऊँचाई लेकर दूसरा आयत बनाते हैं। इस प्रकार जितने भी वर्ग-अन्तराल होते हैं उतने ही आयत एक-दूसरे से सटाकर बनाये जाते हैं। इन ग्राफिक्स को आयत चित्र कहते हैं।

उदाहरण—निम्न सारणी को आयत चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए—

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
0—10	3	40—50	20
10—20	7	50—60	15
20—30	10	60—70	12
30—40	17	70—80	10

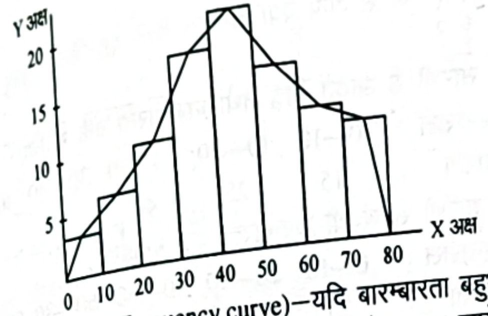
हल :

आयत चित्र



2. बारम्बारता बहुभुज—यदि आयत चित्र में बारम्बारताओं के सम्मुख वर्ग अन्तरालों के मध्य बिन्दुओं को क्रमानुसार मिला दिया जाये तो इस प्रकार मिलाई गई सीधी रेखाएँ x-अक्ष के साथ जो बहुभुज बनाती हैं उसे बारम्बारता बहुभुज कहते हैं।

उदाहरण—उपर्युक्त आयत चित्र में आयतों की ऊपरी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को क्रमानुसार मिलाकर बारम्बारता बहुभुज का चित्र बनाया गया है जो अग्रांकित है—



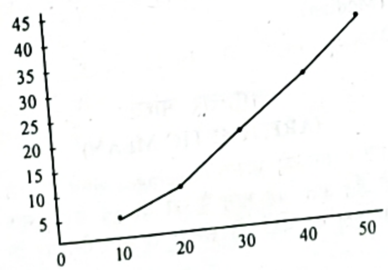
3. बारम्बारता वक्र (Frequency curve)—यदि बारम्बारता बहुभुज की भुजाओं को निष्कोण (Smooth) कर दिया जाये तो एक वक्र रेखा बन जायेगी। इस वक्र रेखा को ही बारम्बारता वक्र कहते हैं। यह आवश्यक नहीं है कि वक्र बारम्बारता बहुभुज के प्रत्येक बिन्दु से होकर जाये परन्तु यदि किसी बिन्दु से होकर न जाये तो उसके बहुत निकट से जाना चाहिए।

4. संचयी बारम्बारता वक्र (Cumulative Frequency Curve or Ogive)—बारम्बारता सारणी में वर्गों की उच्च सीमाओं को भुज और संचयी बारम्बारताओं को कोटि मानकर बिन्दुओं का आलेखन किया जाता है। फिर उन्हें क्रमानुसार एक सतत् वक्र रेखा द्वारा मिलाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त वक्र को संचयी बारम्बारता वक्र कहते हैं।

उदाहरण—निम्न सारणी से संचयी बारम्बारता वक्र बनाइये—

वर्ग	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0—10	5	5
10—20	6	11
20—30	13	24
30—40	10	34
40—50	9	43

हल : बिन्दुओं (10, 5), (20, 11), (30, 24), (40, 34) और (50, 43) को अंकित करके उन्हें एक निष्कोण वक्र (Smooth curve) से मिलाने पर अभीष्ट संचयी बारम्बारता वक्र प्राप्त हो जाता है।



अभ्यास-प्रश्न

1. बारम्बारता वक्र से आप क्या समझते है ? यह किस प्रकार तैयार किया जाता है ?
2. निम्न सारणी से आयत चित्र तथा बारम्बारता वक्र खींचिए–

वर्ग अन्तराल :	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
बारम्बारता :	15	25	40	32	12

3. निम्न सारणी से संचयी बारम्बारता वक्र बनाइए–

वर्ग अन्तराल :	0—10	20—40	40—60	60—80	80—100
बारम्बारता :	25	35	70	55	15

4. निम्नलिखित बंटन से एक आयत चित्र बनाइए।

वर्ग अन्तराल :	0—10	10—20	20—40	40—60	60—70	70—100
बारम्बारता :	8	12	30	26	10	18

5. निम्नांकित सारणी से संचयी बारम्बारता वक्र बनाइये–

वर्ग अन्तराल :	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30
बारम्बारता :	3	5	9	5	2

केन्द्रीय प्रवृत्ति

ऐसी संख्या जो समस्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करती हो, वह न तो समूह की न्यूनतम मान वाली संख्या होगी न अधिकतम मान वाली। निश्चय ही वह संख्या समूह के मध्य या उसके आस-पास की संख्या होगी। तात्पर्य यह है कि सांख्यिकी माध्य के आस-पास समूह के सभी आँकड़े वितरित होते हैं।

इन आँकड़ों की इस प्रवृत्ति को केन्द्रीय प्रवृत्ति (Central Tendency) तथा इस माध्य को केन्द्रीय माप अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें (Measure of Central Tendency) भी कहते हैं। अतः समूह के सभी आँकड़ों की समूह के किसी एक आँकड़े के पास पाये जाने की प्रवृत्ति को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें (Measures of Central Tendency)–केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें कई प्रकार की होती हैं, इनमें से हम निम्नलिखित तीन का अध्ययन करेंगे–

1. समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
2. माध्यिका (Median)
3. बहुलक (Mode)

समान्तर माध्य
(ARITHMETIC MEAN)

अंकगणित में जिस मान को औसत (Average) कहते हैं, उसे हम सांख्यिकी में समान्तर माध्य कहते हैं। अतः वह मान है जो दी हुई संख्यात्मक सामग्री के सभी पदों के मानों के योगफल को पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

उदाहरण–यदि पाँच व्यक्तियों के भार क्रमानुसार 50, 54, 53, 52 तथा 56 किग्रा हों, तो इनका समान्तर माध्य–

$$= \frac{50+54+53+52+56}{5}$$

$$= \frac{265}{5} = 53 \text{ किग्रा}$$

समान्तर माध्य ज्ञात करने की विधियाँ

(क) जब आँकड़े अवर्गीकृत हों–

प्रथम विधि–इस विधि को प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) भी कहते है। यदि $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ पद दिये हों, तो समान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग करके ज्ञात करते हैं–

$$M = \frac{\Sigma x}{n}$$

जहाँ

M = समान्तर माध्य

$\Sigma x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots x_n$.

n = पदों की संख्या।

उदाहरण–किसी परीक्षा में 9 छात्रों के गणित में प्राप्तांक निम्नवत् थे–

26, 20, 30, 36, 21, 38, 40, 22, 37

उनके प्राप्तांकों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : प्राप्तांकों का योग

$$\Sigma x = 26 + 20 + 30 + 36 + 21 + 38 + 40 + 22 + 37$$
$$= 270$$

छात्रों की कुल संख्या(n) = 9

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{270}{9}$$

$$= 30 \text{ अंक}$$

द्वितीय विधि–इस विधि को लघु विधि (Short cut Method) या अप्रत्यक्ष विधि भी कहते हैं। इस विधि का प्रयोग तब करते हैं जब पदों की संख्या अधिक होती है तथा उनका संख्यात्मक मान अधिक होता है। इस विधि के विभिन्न चरण निम्नवत् हैं–

1. दिए हुए आँकड़ों में से एक पद को अथवा किसी उपयुक्त संख्या को कल्पित माध्य (Assumed mean) मान लेते हैं।

2. फिर प्रत्येक पद में से कल्पित माध्य को घटाकर कल्पित माध्य से विचलन ज्ञात कर लेते हैं।

अतः कल्पित माध्य से विचलन = पद – कल्पित माध्य।

3. सभी विचलनों को जोड़कर पदों की संख्या से भाग दे देते हैं। कल्पित माध्य में प्राप्त भागफल को जोड़ने पर अभीष्ट स. मा. प्राप्त होता है। इस प्रकार

यदि कल्पित माध्य = A, पदों की संख्या = n, विचलन d हो, तो

स. मा.

$$(M) = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

उदाहरण—पाँच छात्रों को 200 पूर्णांकों में से क्रमानुसार 80, 82, 85, 90 तथा 103 अंक प्राप्त हुए। इन प्राप्तांकों का समान्तर माध्य लघु विधि से ज्ञात कीजिए।

हल :

प्राप्तांक x	कल्पित माध्य A	कल्पित माध्य से विचलन d
80		80 − 85 = −5
82		82 − 85 = −3
85	85	85 − 85 = 0
90		90 − 85 = 5
103		103 − 85 = 18
$n = 5$		$\Sigma d = 15$

$$\text{समान्तर माध्य } (M) = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= 85 + \frac{15}{5}$$

$$= 85 + 3 = 88 \text{ अंक}$$

(ख) जब आँकड़े अवर्गीकृत परन्तु पदों की बारम्बारता एक से अधिक हो—

इस विधि के निम्न चरण हैं—

1. सर्वप्रथम दिये हुए प्रत्येक पद को संगत बारम्बारता से गुणा करते हैं।
2. प्राप्त गुणनफलों के योगफल में बारम्बारताओं के योगफल से भाग देते हैं। यही भागफल अभीष्ट समान्तर माध्य होगा।

यदि कोई पद x, संगत बारम्बारता f, पदों की संख्या $n = \Sigma f$ हो तो, स. मा.

$$(M) = \frac{\Sigma fx}{n}$$

उदाहरण—50 परिवारों का सर्वेक्षण करने पर प्रत्येक परिवार के पास रहने के कमरों के निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए। समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

कमरों की संख्या x	परिवारों की संख्या f
1	12
2	24
3	8
4	6

हल : समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सारणी बनायी जाती है—

कमरों की संख्या (x)	परिवारों की संख्या (f)	$f \times x$
1	12	12 × 1 = 12
2	24	24 × 2 = 48
3	8	8 × 3 = 24
4	6	6 × 4 = 24
योग	$n = \Sigma f = 50$	$\Sigma fx = 108$

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{108}{50}$$

$$= 2.16$$

(ग) जब आँकड़े वर्गीकृत हों—

इसमें निम्नलिखित चरण होते हैं—

1. सभी वर्गान्तरों के मध्यमान ज्ञात कर लेते हैं।
2. प्रत्येक वर्ग अन्तराल के मध्यमान को उस वर्ग की संगत बारम्बारता से गुणा करके, गुणनफलों का योगफल ज्ञात कर लेते हैं।
3. पुनः प्राप्त योगफल में पदों की संख्या (बारम्बारताओं के योगफल) से भाग देते हैं। यही अभीष्ट समान्तर माध्य होता है।

यदि वर्ग-अन्तराल का मध्यमान = x, संगत बारम्बारता = f,

बारम्बारताओं का योग = $n = \Sigma f$

$$\text{तो समान्तर माध्य } M = \frac{\Sigma fx}{n}$$

उदाहरण—एक निजी प्रतिष्ठान में श्रमिकों की दैनिक मजदूरी का बंटन निम्नलिखित है—

दैनिक मजदूरी (रुपयों में)	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13	13-15
श्रमिकों की संख्या	7	10	23	51	6	3

इस प्रतिष्ठान के श्रमिकों की औसत दैनिक मजदूरी ज्ञात कीजिए।

हल : सारणी—

दैनिक मजदूरी (रु. में) वर्ग अन्तराल	मध्यमान (x)	श्रमिकों की संख्या बारम्बारता (f)	$f \times x$
3—5	4	7	7 × 4 = 28
5—7	6	10	10 × 6 = 60
7—9	8	23	23 × 8 = 184
9—11	10	51	51 × 10 = 510
11—13	12	6	6 × 12 = 72
13—15	14	3	3 × 14 = 42
योग		$n = 100$	$\Sigma fx = 896$

$$\text{स. मा. (M)} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$= \frac{896}{100} = 8.96 \text{ रु.}$$

समान्तर माध्य के गुण

1. इसकी परिभाषा स्पष्ट है।
2. इसका परिकलन सरल है।
3. इसको ज्ञात करने में सभी आँकड़ों का प्रयोग होता है।
4. दो या दो से अधिक समूहों का समान्तर माध्य ज्ञात होने पर समग्र का समान्तर माध्य ज्ञात करना सरल होता है।
5. माध्यिका अथवा बहुलक की अपेक्षा यह माध्य अधिकांश परिस्थितियों में अधिक विश्वसनीय होता है।

समान्तर माध्य के दोष

1. यह निरीक्षण मात्र से ज्ञात नहीं किया जा सकता जबकि माध्यिका और बहुलक को ज्ञात किया जा सकता है।
2. आँकड़ों के उच्चतम और निम्नतम मानों का इस माध्य पर अधिक प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, श्रमिकों की बस्ती में रहने वाले करोड़पति व्यवसायी की आय को सम्मिलित करके उस बस्ती में रहने वाले व्यक्तियों की आय का समान्तर माध्य बहुत अधिक हो जायेगा; जो उस बस्ती में रहने वाले श्रमिकों की आय का उचित प्रतिनिधित्व नहीं करेगा।

माध्यिका
(MEDIAN)

यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही रूप में व्यवस्थित किया जाये तो ठीक मध्य में पड़ने वाला आँकड़ा माध्यिका कहलाता है।

माध्यिका ज्ञात करना

(A) जब आँकड़े अवर्गीकृत हों—सर्वप्रथम आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखते हैं। फिर आरोही अथवा अवरोही क्रम में लिखे गये इन आँकड़ों का मध्य पद ज्ञात करते हैं।

(1) यदि आँकड़ों की संख्या n विषम है तो $\frac{n+1}{2}$वाँ पद मध्य पद होगा।

अतः $$\text{माध्यिका} = \frac{n+1}{2}\text{वें पद का मान}$$

(2) यदि आँकड़ों की संख्या n सम है तो आँकड़ों में दो मध्य पद $\frac{n}{2}$वाँ पद और $\frac{n+1}{2}$वाँ पद

अतः आँकड़ों की माध्यिका इन दोनों के योग की आधी होगी।

अतः $$\text{माध्यिका} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$$

उदाहरण 1. एक छात्र के नौ प्रश्न-पत्रों में निम्नलिखित प्राप्तांक थे—

65, 36, 58, 62, 42, 40, 72, 82, 25

प्राप्तांकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : प्राप्तांकों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

25, 36, 40, 42, 58, 62, 65, 72, 82

यहाँ $n = 9$ अर्थात् पदों की संख्या विषम है।

अतः $$\text{माध्यिका} = \frac{n+1}{2}\text{वाँ पद का मान}$$

$$= \frac{9+1}{2}\text{वाँ पद का मान}$$

$$= 5\text{वाँ पद का मान}$$

$$= 58 \text{ अंक}$$

उदाहरण 2. एक कार्यालय में दस कर्मचारियों का दैनिक वेतन (रुपयों में) निम्नलिखित हैं—

10, 13, 22, 25, 8, 11, 19, 17, 31, 36

वेतन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : वेतन को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर—

8, 10, 11, 13, 17, 19, 22, 25, 31, 36

यहाँ $n = 10$, अर्थात् पदों की संख्या सम है।

अतः $$\text{माध्यिका} = \frac{1}{2}\left[\frac{n}{2}\text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right)\text{वें पद का मान}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,[5\text{वें पद का मान} + 6\text{वें पद का मान}]$$

$$= \frac{1}{2}\,[17 + 19]$$

$$= 18$$

अतः वेतन की माध्यिका = 18 रु.

(B) जब आँकड़े अवर्गीकृत परन्तु सारणीबद्ध हों—अवर्गीकृत परन्तु सारणीबद्ध आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए संचयी बारम्बारता सारणी बनाकर ज्ञात करते हैं कि मध्य पद कहाँ स्थित है अर्थात् किस वर्ग के अन्तर्गत आता है। फिर उपर्युक्त विधि द्वारा माध्यिका ज्ञात करते हैं।

उदाहरण—निम्नलिखित बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

पद	3	5	7	9	11	13	15
बारम्बारता	3	2	8	4	12	10	4

हल : सारणी–

पद	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
3	3	3
5	2	5
7	8	13
9	4	17
11	12	29
13	10	39
15	4	43
योग	**43**	

यहाँ $n = 43$, अर्थात् पदों की संख्या विषम है।

अतः मध्य पद $= \frac{n+1}{2}$वाँ पद

$= \frac{43+1}{2}$वाँ पद

$= 22$वाँ पद

संचयी बारम्बारता देखने से स्पष्ट होता है कि 22वाँ पद, 17 से अधिक और 29 से कम है। अतः 22वाँ पद उस वर्ग में होगा जिसकी संचयी बारम्बारता 29 है।

22वें पद का मान = 11

अतः अभीष्ट माध्यिका = 11

माध्यिका के गुण

1. यह सुपरिभाषित है।
2. इसकी गणना सरल है।
3. यह दो चार बहुत छोटे या बहुत बड़े पदों से प्रभावित नहीं होती है।
4. बारम्बारता लेखाचित्र में इसे निरीक्षण से ही ज्ञात किया जा सकता है।

माध्यिका के दोष

1. यह केवल मध्य पदों का ही निरीक्षण करती है, अन्य आँकड़ों का नहीं। इसलिए यह आँकड़ों का पूर्णतया प्रतिनिधित्व नहीं कर पाती है।

2. जब माध्यिका और पदों की संख्या ज्ञात हो, तो पदों का योग ज्ञात नहीं हो सकता।

3. इसे ज्ञात करने के लिए आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखना पड़ता है। आँकड़ों की संख्या अधिक होने पर इसमें कठिनाई होती है।

बहुलक
(MODE)

सांख्यिकी आँकड़ों में जिस पद की बारम्बारता अधिक हो, तो वह पद उन आँकड़ों का बहुलक कहलाता है।

उदाहरण : माना एक कक्षा में 15 छात्रों के भार निम्नवत् हैं–

51, 52, 53, 51, 51, 40, 39, 51, 45, 45, 50, 60, 51, 52, 51

इन आँकड़ों को सारणी के रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है–

भार (कि. ग्राम में)	39	40	45	50	51	52	53	60
छात्रों की संख्या	1	1	2	1	6	2	1	1

यहाँ पद 51 की बारम्बारता 6 है जो कि सभी पदों की बारम्बारताओं में सबसे अधिक है। अतः इन आँकड़ों का बहुलक 51 किग्रा. है।

बहुलक के गुण

1. इसका समझना और उपयोग करना सरल है।
2. अधिकतर यह निरीक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है।
3. इस पर बहुत छोटे या बहुत बड़े पदों का कोई प्रभाव नहीं पड़ता।
4. इसे लेखाचित्र से भी ज्ञात किया जा सकता है।
5. व्यापार में बहुलक बहुत ही उपयोगी है। उदाहरणार्थ, यदि यह ज्ञात हो जाये कि किस विशेष साइज की बनियान सबसे अधिक बिकती है तो उसका उत्पादन सबसे अधिक होगा।

बहुलक के दोष

1. यह सुपरिभाषित नहीं है। कभी-कभी दो या अधिक बहुलक भी प्राप्त होते हैं।
2. अधिकतम बारम्बारता के कई पद होने पर बहुलक की गणना कठिन हो जाती है।
3. यह श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होता है।

समान्तर माध्य, माध्यिका और बहुलक में सम्बन्ध

समान्तर माध्य – बहुलक = 3 (समान्तर माध्य – माध्यिका)

अभ्यास-प्रश्न

1. 7, 11, 14, 18, 21, 17 और 10 का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।
उत्तर–14

2. दस संख्याओं का समान्तर माध्य 25 है और अंतिम 8 संख्याओं का समान्तर माध्य 20 है, तो प्रथम दो संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
उत्तर–90

3. निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए–

वर्ग	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50
बारम्बारता	8	9	4	5	4

उत्तर–21

4. निम्नलिखित की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

(A) 12, 30, 14, 18, 25, 28, 22, 20, 25

(B) 2, 2.3, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8

उत्तर—22

उत्तर—2.55

5. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

प्राप्तांक	33	34	35	36	37
बारम्बारता	2	3	4	5	1

उत्तर—35

6. निम्नलिखित बारम्बारता बटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

वर्ग-अन्तराल	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60
बारम्बारता	2	3	4	5	4	2

उत्तर—32

7. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए—

(A) 2, 4, 5, 4, 6, 3, 4

(B) 24, 25, 28, 24, 30, 25, 28, 25, 26, 25

(C) 15, 21, 8, 12, 15, 9, 15, 12, 8, 15, 9

उत्तर—(A) 4, (B) 25, (C) 15

8. निम्नलिखित सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए—

पद	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
बारम्बारता	5	27	40	33	40	38	20	12	8	6

उत्तर—14 व 16

■■

25

गणित में मनोरंजन के खेल, पहेलियाँ, जादुई वर्ग तथा गणित में वैदिक गणित का उपयोग

[ENTERTAINING GAMES IN MATHEMATICS, PUZZLES, MAGIC SQUARE AND USE OF VAIDIC MATHEMATICS IN MATHEMATICS]

गणित विषय को रोचक बनाने के लिए बहुत से ऐसे खेल निकाले गये, जिनसे बालक की गणित विषय में रुचि बढ़ती है। कुछ उदाहरण निम्न है—

1. जादुई वर्ग—ग्वालियर के किले का दरवाजे पर एक आश्चर्यजनक जादुई वर्ग दिया गया है। चौथे क्रम के आम जादुई वर्ग में दस विभिन्न व्यवस्थाएँ बनी है, जबकि जोड़े गए अंकों का योगफल समान रहता है—

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

ग्वालियर के किले पर बने जादुई वर्ग में जिसका चित्र ऊपर दिया गया है, 25 ऐसी व्यवस्थाएँ बनती हैं, जिनका योगफल समान रहता है।

पुरातन काल में यह विश्वास बना हुआ था कि संख्यात्मक वर्गों में जादुई शक्ति है। इसको धातु तथा पत्थर पर खोदकर बुरी आत्माओं को दूर करने के लिए ताबीज के रूप में धारण किया जाता था। भारत में आजकल भी इनका प्रयोग होता है।

2. एक जादुई सितारा—चित्र में छह कोनों वाला सितारा है, जिसके निश्चित स्थानों पर 1 से 12 तक की संख्याएँ क्रम में लिखी हुई हैं। प्रत्येक कतार की संख्याओं का योगफल 26 है।

3. सत्य वाक्य बनाना—दी गई संख्याएँ 1, 4, 8, 11 तथा चिन्ह >, <, = आदि से कौन-से वाक्य बनाए जा सकते हैं ?

$$1 + 11 = 4 + 8$$
$$11 - 8 = 4 - 1$$
$$1 + 8 < 11$$
$$4 + 8 = 12$$
$$1 + 8 < 4 + 11$$
$$8 + 11 > 1 + 4$$ आदि।

4. जादुई कलेण्डर—हम जादुई कलेण्डर के बारे में जानकारी दे रहे हैं। इसकी क्रिया बताने से पूर्व आप निम्नलिखित संख्याओं के माध्यम से अपने मित्रों को 2000 के किस माह की किस तारीख को क्या बार होगा, आसानी से बता सकते हैं—

जनवरी-5, फरवरी-1, मार्च-2, अप्रैल-5, मई-0, जून-3, जुलाई-5, अगस्त-1, सितम्बर-4, अक्टूबर-6, नवम्बर-2, दिसम्बर-4, मास के साथ दी गई संख्या को पूछी गई तिथि में जोड़कर तत्पश्चात् कुल जोड़ को 7 से भाग करते हैं। यदि भागफल 0 हो तो रविवार, 1 हो तो सोमवार, 2 हो तो मंगलवार, 3 हो तो बुधवार, 4 हो तो गुरुवार, 5 हो तो शुक्रवार, 6 हो तो शनिवार।

5. पाँच सीढ़ियों का खेल—एक बालक से पहली सीढ़ी में 6 में से 5, 5 में से 4, 4 में से 3, 3 में से 2 तथा 2 में से 1 घटाने को कहें। यदि वह सफल होता है तो दूसरी सीढ़ी में से घटाने को कहें। इसी प्रकार आगे की सीढ़ियों में घटाने को कहें।

6	11	16	21	15
5	9	13	17	14
4	7	10	13	12
3	5	7	9	9
2	3	4	5	5
1	1	1	1	0

इस प्रकार जब तक वह बच्चा सब सीढ़ियों पर घटाने तथा जोड़ने की क्रिया को पूर्ण नहीं कर लेता, तब तक वह अपना यही क्रम जारी रखेगा। यह क्रम तब तक जारी रहेगा जब तक प्रत्येक सीढ़ी के अंकों को वह जोड़ व घटा न ले।

रोचक गणित

आपको संख्याओं का रोचक खेल बताते हैं। इससे 8 का अनोखा पिरामिड बनता है। इसके लिये आगे दी गई संख्याओं की क्रिया को ध्यान से देखो।

$$9 \times 0 + 8 = 8$$
$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$9 \times 98 + 6 = 888$$
$$9 \times 987 + 5 = 8888$$
$$9 \times 9876 + 4 = 88888$$
$$9 \times 98765 + 3 = 888888$$
$$9 \times 987654 + 2 = 8888888$$
$$9 \times 9876543 + 1 = 88888888$$
$$9 \times 98765432 + 0 = 888888888$$

गुणा किये बिना गुणनफल ज्ञात करना—गुणा करना सभी जानते हैं। हम ऐसी तरकीब बतायेंगे कि गुणा करते समय केवल अंक का पहाड़ा पढ़ना होगा और बाकी काम केवल जोड़ने से हो जायेगा।

यह तरकीब केवल उन्हीं संख्याओं को आपस में गुणा करते समय लागू होती है जिनमें केवल एक ही अंक होता है, जैसे 11, 22, 33, 777, 555, 88888 आदि।

इस तरकीब को समझने के लिए एक ऐसी संख्या लें मान लो संख्या 77 है। अब हमें 77 को 77 से गुणा करना है, तब

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 539 \\ 539\times \\ \hline 5929 \\ \hline \end{array}$$

इस तरीके से गुणा करने के लिए हमें केवल 7 में 7 का एक बार गुणा करना पड़ेगा, बाकी काम जोड़ने का होगा। 7 को 7 से गुणा करने पर 49 प्राप्त होगा। अब 49 को चार बार नीचे दिये तरीके से लिखें। पहले लिखकर उसके नीचे दो बार पास-पास 49 इस प्रकार लिखेंगे कि ऊपर के 49 के इकाई के अंक के नीचे दहाई का अंक आये। इसके नीचे एक बार फिर 49 लिखो, जिससे दूसरी पंक्ति के दहाई के अंक के नीचे 9 आये और सैकड़े के अंक के नीचे 4 और इन्हें जोड़ लें।

$$\begin{array}{r} 77 \\ \times 77 \\ \hline 49 \\ 4949 \\ 49 \\ \hline 5929 \\ \hline \end{array}$$

अतः 77 × 77 का मान 5929 आया।

तीन अंकों वाली संख्या

$$
\begin{array}{r}
666 \\
\times\, 666 \\
\hline
36 \\
3636 \\
363636 \\
3636 \\
36 \\
\hline
442556 \\
\hline
\end{array}
$$

अतः 666 × 666 का मान 442556 आया।

पहेली—वाराणसी के राजा ब्रह्मदत्त के दरबार में सिद्धसैन नाम का एक गणितज्ञ मंत्री पद पर कार्यरत था। उसने शतरंज के खेल का आविष्कार किया। इस अनोखे व मनोरंजक खेल को देखकर राजा बड़ा प्रसन्न हुआ। उसने मंत्री से कहा कि इसके आविष्कार के लिए कोई पुरुस्कार माँगो। पहले मंत्री ने अपनी अनिच्छा दिखाई, परन्तु राजा के अधिक कहने पर उसने कहा—महाराज यदि आप कुछ देना चाहते हैं, तो शतरंज के 64 खानों में गेहूँ के दाने रखा दीजिए। दाने इस प्रकार रखे जाएँ कि एक खाने में एक-दूसरे खाने में दो, तीसरे खाने में चार, चौथे में आठ आदि के क्रम में।

राजा ने इसे साधारण बात समझी। उसने अपने सेवक से कहा कि शतरंज के खानों में मंत्री के कथनानुसार दाने रख दें। सेवक ने राजा के कथनानुसार खानों में गेहूँ के दाने रखना शुरु किया।

पर यह क्या ? आधे से अधिक खाने-भरने पर ही राजा का खाद्य गोदाम खाली हो गया। राजा व दरवारी अचरज में पड़ गए। यह संख्या अरबों-खरबों तक पहुँचती है।

सोचो और बताओ (Quiz)

चित्र में एक बड़ा वर्ग नौ छोटे वर्गों में विभाजित है इन छोटे वर्गों में ऐसी 1 से 9 तक की संख्याएँ भरनी हैं, जिनकी पंक्तिवार या कर्णवार (तिरछे) योगफल सदैव 15 ही हैं।

8	1	6
3	5	7
4	9	2

संख्याओं के रोचक गुण

यदि किसी तीन अंकों वाली संख्या में केवल एक ही अंक तीन बार आता है, यथा—111, 222, 333 आदि, तब उस संख्या में कुछ विशेष गुण आ जाते हैं। संख्या में उन तीन अंकों के योगफल का भाग देने का भागफल सदैव 37 आता है। यह गुण अग्रांकित उदाहरण से स्पष्ट हो जाता है।

अंक	3	5	7	8
संख्या	333	555	777	888
अंकों का प्रयोग	9	15	21	24
संख्याओं में योग का भाग देने पर उत्तर	37	37	37	37

वैदिक गणित

वैदिक गणित प्राचीन वेदों में निहित सूत्रों के ऊपर आधारित है। मुनियों ने अपने तीव्र ज्ञान से कुछ सूत्र दिये वे निम्न हैं—

वेदों के सोलह सरल गणितीय सूत्र

सूत्र

1. एकाधिकेन पूर्वेण
2. निखिलं नवतश्चरमं दशतः
3. ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्
4. परावर्त्य योजयेत्
5. शून्यं साम्य समुच्चेय
6. (आनुरूप्ये) शून्य मन्यत्
7. संकलन व्यवकलनाभ्याम्
8. पूरणा पूरणाभ्याम्
9. चलन कलनाभ्याम्
10. यावदूनम्
11. व्यष्टि समष्टि
12. शेषाण्दूरेव चरमेण
13. सोपान्त्यद्वयमन्त्यम्
14. एकन्यूनेन
15. गणित समुच्चयः
16. गुणक समुच्चयः

उपसूत्र अथवा उपप्रमेय

आनुरूप्येण
शिष्यते शेष संज्ञः
आद्यमाद्ये नान्त्यमन्त्येन
केवलैः सप्तकं गुण्यात्
वेष्ट नम्
यावदूनं तावदूनम्
यावदूनं तावदूनीकृत्य वर्ग च योजयेत
अन्त्य योर्द शकेऽपि
अन्त्ययोरवे
समुच्चयगुणितः
लोपनस्थापनाभ्याम्
विलोकनम्
गुणितसुमुच्चयः समुच्चय गुणितः

संख्याओं के वर्ग करना

आनुरूप्येण (अर्थात् गुणज उपगुणज का उपयुक्त क्रियात्मक आधार अंक के रूप में चयन और उसकी प्रक्रिया में गुणन कार्य करना) के सिद्धान्त तथा प्रक्रिया को निम्नलिखित अतिरिक्त उदाहरण स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 1. 49 × 49

क्रियात्मक आधार अंक 100/2 = 50

$$
\begin{array}{r}
49 - 1 \\
49 - 1 \\
\hline
2\,)\,48/01 \\
24/01
\end{array}
$$

उदाहरण 2. 59×59

क्रियात्मक आधार अंक $10 \times 5 = 50$

$$\begin{array}{r} 59 + 9 \\ \underline{59 + 9} \\ 68/81 \\ \underline{\times\ 5/} \\ \underline{340/0^{1} = 3481} \end{array}$$

उदाहरण 3. 19×19

क्रियात्मक अंक $10 \times 2 = 20$

$$\begin{array}{r} 19 - 1 \\ \underline{19 - 1} \\ 18/1 \\ \underline{\times\ 2} \\ 36/1 \end{array}$$

विभिन्न संख्या पर परस्पर गुणन

उदाहरण 4. 23×29

क्रियात्मक आधार अंक $10 \times 3 = 30$

$$\begin{array}{r} 23 - 7 \\ \underline{29 - 9} \\ 14/6^{3} \\ \underline{\times\ 3} \\ 42/6^{3} \end{array}$$

अतः गुणा $= 423$

उदाहरण 5. 249×245

क्रियात्मक आधार अंक $= 1000/4 = 250$

$$\begin{array}{r} 249 - 1 \\ \underline{245 - 5} \\ 4\,)\,249/005 \\ 61/005 \end{array}$$

अतः गुणा $= 61005$

गुणन की अन्य विधियाँ

गुणन की इतनी अधिक विधियाँ हैं और उनमें से एक (ऊर्ध्व तिर्यक) पूर्ण रूप से व्यापक है और इसलिए सभी स्थानों पर लागू होती है और अन्य (निखिलम्; यावद्नम् इत्यादि) केवल विशेष स्थानों पर लागू होती हैं। इसलिए विद्यार्थी को सभी

विधियों की लाभ-हानि देखकर, यह निश्चित करना चाहिए कि कौन-सी विधि या सूत्र किस स्थान पर उपयुक्त है।

अब हम इस अध्याय को अपनी टिप्पणियाँ हाशिये में देते हुए, कई विविध उदाहरण देकर समाप्त करते हैं जिंससे कि विद्यार्थी को कई विधियों में से उपयुक्त विधि का चुनाव करने का कुछ अनुभव हो जाए।

(1) 73×37

(A) ऊर्ध्वतिर्यक् नियम द्वारा

$$\begin{array}{r} 73 \\ 37 \\ \underline{2181} \\ \underline{52} \\ 2701 \end{array}$$

(B) उसी विधि के द्वारा परन्तु शिरो रेखा का उपयोग करते हुए–

$$\begin{array}{r} 1\bar{3}3 \\ \underline{04\bar{3}} \\ 04\bar{5}1 \\ \underline{\bar{1}2} \\ 2701 \end{array}$$

(2) ऊर्ध्वतिर्यक् द्वारा–

(A) ऊर्ध्वतिर्यक् द्वारा

$$\begin{array}{r} 94 \\ \underline{\times\ 81} \\ 7214 \\ \underline{4} \\ \underline{7614} \end{array}$$

(B) शिरोरेखा के उपयोग द्वारा

$$\begin{array}{r} 1\bar{1}4 \\ \underline{1\bar{2}1} \\ \underline{1\bar{3}7\bar{9}4} \end{array} = 7614$$

(C) निखिलम् विधि द्वारा–

$$\begin{array}{r} 81 - 19 \\ \underline{94 - 6} \\ \underline{75/1\ 14} \end{array} = 7614$$

ऊर्ध्व तिर्यक् विधि शिरोरेखा विधि से अधिक सरल है, और निखिलम् उन दोनों से अधिक सरल।

(3) 123×89

(A)
$$\begin{array}{r} 123 \\ 089 \\ \hline 08527 \\ 242 \\ \hline 10947 \\ \hline \end{array}$$

या

(B)
$$\begin{array}{r} 123 \\ 1\bar{1}\bar{1} \\ \hline 1105\bar{3}\bar{3} \end{array}$$

$= 10947$

या

$$\begin{array}{r} 123 + 23 \\ 89 - 11 \\ \hline 112/2^{-53} \end{array}$$

$= 109/47$

भाग विधि (निखिलम् विधि द्वारा)

गुणन पर यथेष्ट विवरण के साथ विवेचना करने के बाद, अब हम भाग पर आते हैं, और उसे निखिलम् विधि के द्वारा प्रारम्भ करते हैं (जो कि एक विशिष्ट विधि है)।

मान लीजिए कि हमें दो अंकों वाले भाज्यों को एक ही भाजक 9 से भाग देना है, तब उसका पटल हम इस तरह बनाते हैं–

(1) 9) 1/2
1
1/3

(2) 9) 2/1
2
2/3

(3) 9) 3/1
3
3/4

(4) 9) 4/0
4
4/4

(5) 9) 5/2
5
5/7

(6) 9) 6/1
6
6/7

(7) 9) 7/0
7
7/7

(8) 9) 8/0
8
8/8

हम भाज्य को एक खड़ी लकीर द्वारा दो भागों में बाँट लें, बायाँ भजनफल के लिए और दाहिना शेष के लिए।

इन सभी विशिष्ट उदाहरणों में हम देखते हैं कि भाज्य का पहला अंक भजनफल बन जाता है और दोनों अंकों का योग शेष बन जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि पहले अंक को हम यंत्रवत् भजनफल के स्तम्भ में नीचे उतार सकते हैं और भजनफल को दूसरे अंक में जोड़ने से शेष मिल जाता है।

आगे हम तीन अंकों वाली बड़ी संख्याओं को भाज्य लेते हैं और उनका पटल इस तरह बनाते हैं–

(1) 9) 10/3
1/1
11/4

(2) 9) 11/3
1/2
12/5

(3) 9) 12/4
1/3
13/7

(4) 9) 16/0
1/7
17/7

(5) 9) 21/1
2/3
23/4

(6) 9) 31/1
3/4
34/5

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि शेष और भाज्य के अंकों का योग एक ही संख्या है, और भाज्य का पहला अंक यंत्रवत् नीचे उतार कर रखने से भजनफल का पहला अंक मिल जाता है तथा उसे भाज्य के दूसरे अंक में जोड़ने से भजनफल का दूसरा अंक मिल जाता है।

गुणनखण्ड

'विलोम गुणन' रूप में और भाग के विशेष अनुप्रयोग के रूप में इस समय गुणनखण्ड का विवेचन स्वभावतया आता है। यह विषय जो आधुनिक गणित संसार के लिए नया है, हमारे वैदिक गणित में प्रारम्भिक अवस्था में आता है तथा इस पर वैदिक सूत्रों में बहुत प्रभावशाली सामग्री है।

उदाहरणार्थ, एक द्विघाती व्यंजक का उनके घटक द्विपदी खण्डों में गुणनखण्ड ले लें। जब $क^2$ का गुणांक 1 हो, तब तो प्रचलित प्रणाली के अनुसार भी यह सरल है, जिसमें कि आपको दो ऐसी संख्याएँ सोचकर निकालनी पड़ती हैं जिनका कि बीजगणितीय योग मध्य पद गुणांक हो तथा जिनका गुणनफल निरपेक्ष पद के बराबर हो। उदाहरणार्थ द्विघाती व्यंजक $क^2 + 7क + 10$ है, तब दो खण्डों $(क + 2)$ $(क + 5)$ का गुणा हम मन में ही कर लेते हैं, हम दो संख्याएँ 5 और 2 सोचते हैं जिनका योग 7 है तथा गुणनफल 10, हम इस तरह $(क^2 + 7क + 10)$ को $(क + 2)$ $(क + 5)$ में गुणन खण्डित करते हैं। उसकी वास्तविक प्रक्रिया निम्न प्रकार है–

$$\begin{aligned} क^2 + 7क + 10 &= क^2 + 2क + 5क + 10 \\ &= क(क + 2) + 5(क + 2) \\ &= (क + 2)(क + 5) \end{aligned}$$

यह विधि गणितीय विधि से निस्संदेह शुद्ध है, परन्तु अनावश्यक रूप से बड़ी है। वैदिक प्रणाली दो लघु उपसूत्रों की सहायता से इस तरह की कठिनाई नहीं होने देती। वे हैं–

(अ) आनुरूप्येण तथा (ब) आद्य माद्येनान्त्यमन्त्येन और क्रमशः जिनका अर्थ है 'अनुपात सहित' तथा "प्रथम को प्रथम के द्वारा और अंतिम को अंतिम के द्वारा।" यह इस प्रकार कार्य करता है–

(1) मध्य गुणांक को इस तरह के दो भागों में बाँटिए जिससे कि पहले गुणांक का पहले हिस्से के साथ अनुपात, दूसरे हिस्से का अंतिम गुणांक के अनुपात के बराबर हो। इस तरह $2क^2 + 5क + 4$ द्विघाती में मध्य गुणांक 5 को इस तरह दो भागों (4 तथा 1) में विभाजित करते हैं जिससे कि प्रथम गुणांक तथा प्रथम भाग का अनुपात (अर्थात् 2 : 4) और द्वितीय भाग का अंतिम गुणांक के साथ (अर्थात् 1 : 2) बराबर हों। अब यह अनुपात एक खण्ड दे देता है [अर्थात् $(क + 2)$] और दूसरा गुणनखण्ड, द्विघाती के प्रथम गुणांक को गुणनखण्ड के पूर्व प्राप्त प्रथम गुणांक से तथा अंतिम पद को (द्विघाती के), उस गुणनखण्ड के अंतिम पद से भाग देने से मिलता है। यथा दूसरे शब्दों में दूसरा द्विपदी खण्ड इस तरह मिलता है–

$$\frac{2क^2}{क} + \frac{2}{2} = 2क + 1$$

इस तरह $2क^2 + 5क + 2 = (क + 2)(2क + 1)$

■■

परिशिष्ट

[APPENDIX]

[अ]

प्रमुख गणितज्ञ

(Prominent Mathematicians)

1. पाइथागोरस

गणित के क्षेत्र में अनेक विद्वान हुए जिनमें से पाइथागोरस भी एक उच्चकोटि के गणितज्ञ थे। इनका जन्म ग्रीस के निकट, एजियन सागर के मध्य, सामोस (Samos) नामक द्वीप में ईसा से लगभग 580 वर्ष पूर्व हुआ था। इनके माता-पिता तैरियन वंश के थे। इनके गुरु, मिलेट्स निवासी थेल्स (Thales) इतिहास-प्रसिद्ध ग्रीस के सात विद्वानों मे से एक थे। उनके आदेश पर पाइथागोरस ने मिस्र देश में जीवन का प्रारम्भिक काल व्यतीत किया। वहाँ लगभग 22 वर्ष रहकर उन्होंने विभिन्न विज्ञान, विशेषतः गणित का गहन अध्ययन किया।

इसके बाद लगभग 12 वर्ष बाद इराक, ईरान और भारत की यात्रा में व्यतीत करके पाइथागोरस स्वदेश लौट गये। तब तक इनकी आयु लगभग 50 वर्ष हो चुकी थी। वे सामोस में नहीं रह पाये। समोस छोड़कर दक्षिण इटली के क्रोटोना (Crotona) नगर में आ बसे। वहाँ मिलो नामक व्यक्ति के अतिथि बने रहे। वहीं लगभग 60 वर्ष की आयु में मिलो की तरुण एवं सुन्दर कन्या थियोना से विवाह किया। कहा जाता है कि थियोना ने अपने पति के जीवन-चरित्र पर एक पुस्तक भी लिखी है जो आज अप्राप्य है।

क्रोटोना में बस जाने के बाद पाइथागोरस ने गणित और दर्शन-शास्त्र पर व्याख्यान देना प्रारम्भ किया। सभी वर्गों के लोग इनके विद्वतापूर्ण भाषण सुनने आते थे। वहाँ वैधानिक रूप से सार्वजनिक भाषणों में स्त्रियों के आने पर रोक थी परन्तु फिर भी स्त्रियाँ, इस नियम का उल्लंघन कर काफी संख्या में इनका भाषण सुनने आया करती थीं।

इनके भाषण इतने प्रभावशाली होते थे कि नियमित रूप से भाषण सुनने वालों ने अपना एक स्वतन्त्र संगठन तैयार कर लिया। वही संगठन पाइथागोरस स्कूल के नाम से प्रसिद्ध हुआ। उस संगठन के अपने कुछ विशेष नियम थे; जैसे—संस्था की सभी वस्तुओं पर समान अधिकार तथा सभी सदस्यों के दार्शनिक विचारों एवं मान्यताओं में समानता। सभी सदस्यों को शपथ लेनी पड़ती थी कि वे अपनी गुप्त विद्या को किसी बाहरी व्यक्ति के सामने व्यक्त न करेंगे। उस संगठन का यह नियम भी था कि प्रत्येक खोज तथा आविष्कार को पाइथागोरस के नाम से जोड़ा जाय।

इसलिए आज यह पता लगाना असम्भव प्रतीत होता है कि कौन-सी खोज स्वयं पाइथागोरस ने की और कौन-सी शिष्यों ने।

आजकल पढ़ाई जाने वाली ज्यामिति ग्रीक गणितज्ञ यूक्लिड के 'एलिमेण्ट्स' (Elements) पर आधारित है। उसी ग्रन्थ का 47वाँ प्रमेय पाइथागोरस प्रमेय के नाम से प्रसिद्ध है जिसमें बताया गया है कि समकोण त्रिभुज के कर्ण पर आधारित चौरस (Rectangular) इस त्रिभुज के लम्ब और पाए पर आधारित चौरसों के योग के तुल्य होता है।

प्राचीनकाल में भारतवर्ष में यज्ञ आदि के लिए जो वेदी बनायी जाती थी, इसके निर्माणार्थ ज्यामितीय आकारों का निश्चित विधान था। वह विधान हमें 'शल्वसूत्र' ग्रन्थों में मिलता है। इन ग्रन्थों में भी पाइथागोरस के प्रमेय का उल्लेख मिलता है। साथ ही $3^2+4^2=5^2$ का सम्बन्ध भी अन्य अनेक सम्बधों सहित मिलता है। इससे यह भी पुष्टि होती है कि पाइथागोरस सचमुच भारत आया था और उसने भारत की प्राचीन ज्यामिति को सीखा था।

इसके अतिरिक्त पाइथागोरस ने संख्या-शास्त्र पर कार्य किया है। उसने समस्त संख्याओं को सम और विषम भागों में बाँटा। उसी से विषम संख्याओं को शुभ और सम संख्याओं को अशुभ मानने की एक प्रथा चल पड़ी। संख्याओं के सम्बध में कुछ और भी विचित्र मान्यताएँ थीं; जैसे—एक का अंक विचार का, दो तर्क का, चार न्याय का, पाँच विवाह का द्योतक है। इसी प्रकार ज्यामिति में एक का अंक बिन्दु का, दो रेखा का, तीन समतल का और चार ठोस का प्रतीक माना जाता था। इन्हीं कुछ संख्याओं को त्रिभुज संख्या नाम दिया; जैसे—3, 6 और 10 आदि त्रिभुज संख्याएँ हैं। प्रथम दो संख्याऐं का योग $1+2=3$ प्रथम त्रिभुज संख्या कहलाती है। प्रथम तीन संख्याओं का योग $1+2+3=6$ द्वितीय त्रिभुज संख्या और प्रथम चार संख्याओं का योग $1+2+3+4=10$ तीसरी त्रिभुज संख्या कहलाती थी।

पाइथागोरस स्कूल ने गणित के अनेक शब्दों को जन्म दिया; जैसे—मैथमैटिक्स (Mathematics), पैराबोला (Parabola), ईलिप्स (Ellipse) और हाईपरबोला (Hyperbola)। मिस्रवासियों को केवल तीन ठोस ज्ञात थे—घन (Cube), समचतुष्फलक (Tetrahedron) और समअष्टफलक (Octahedron)। पाइथागोरस ने दो समठोसों समद्वादशफलक (Dodecahedron) और विंशतिफलक (Icosahedron) की खोज की।

वास्तव में पाइथागोरस और उसके द्वारा संस्थापित स्कूल की गणितशास्त्र को जो देन है, उसका ग्रीक गणित में सर्वोच्च स्थान है। पाइथागोरस की कई धारणाएँ आधुनिक काल के गणित में पूर्णरूप से विकसित हैं।

2. यूक्लिड

(EUCLID)

यूक्लिड के जन्म और मृत्यु का ठीक-ठीक पता नहीं है। इतना अवश्य मालूम है कि उसका समय 300 ई० पू० के लगभग था। इसकी प्रारम्भिक शिक्षा एन्थेस में हुई। टोलेमी प्रथम (Ptolemy I) के राज्यकाल (306 ई० पू० से 283 ई० पू० तक) में इसने सिकन्दरिया (Alexandria) में एक स्कूल खोला। ऐसा कहा जाता है कि एक बार इसके एक शिष्य ने ज्यामिति का प्रथम साध्य पढ़ने के बाद कहा कि इसके

सीखने से क्या मिलेगा। यूक्लिड ने अपने नौकर से कहा कि इसे 6 पैनी दे दो, क्योंकि यह प्रत्येक बात में लाभ ही चाहता है।

यूक्लिड का सबसे विख्यात ग्रन्थ 'एलिमेण्ट्स' है जिसके 1882 ई० से अब तक एक हजार से अधिक संस्करण हो चुके हैं। इस ग्रन्थ की विषय-सूची निम्नलिखित है–

1. सर्वांगसमता (Congruency) और समानता (Parallelism)
2. बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ और क्षेत्रफल (Algebraic Indentity and Area)
3. वृत्त (Circle)
4. अन्तर्गत और परिगत बहुभुज (Inscribed and Circumscribed Polygons)
5. समानुपात (Proportion)
6. बहुभुजों की समरूपता (Similarity of Polygons)

7–9. अंकगणित (Arithmetic)

10. असुमेय राशियाँ (Irrational Numbers)

11–13. ठोस ज्यामिति (Solid Geometry)

इस ग्रन्थ के अतिरिक्त यूक्लिड के अन्य ग्रन्थ निम्नलिखित हैं–

(1) **डाटा** (Data)–इसमें 94 साध्य दिये गये हैं। इन साध्यों में किसी आकृति के कुछ अंग (Elements) ज्ञात होने पर शेष अंग ज्ञात करने की विधि का उल्लेख है।

(2) **आकृतियों के विभाजन पर एक पुस्तक**–इस पुस्तक का विषय है कि यदि कोई आकृति त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि दी हुई हो तो ऐसे दो भागों में किस प्रकार विभाजित किया जाय कि उन दोनों भागों के क्षेत्रफल में एक निर्दिष्ट (Given) अनुपात हो।

(3) **स्यूडेरिया** (Pseudaria)–इस पुस्तक में यह विषय वर्णित किया गया है कि ज्यामिति के अध्ययन में विद्यार्थी आमतौर पर कौन-कौन-सी गलतियाँ करते हैं।

(4) **शांकव** (Conic)–यह पुस्तक चार जिल्दों में है ।

(5) **पोरिज्म्स** (Porisms)–इस ग्रन्थ में उच्च ज्यामिति विषय वर्णित किया गया है।

(6) **तल-बिन्दुपथ** (Surface Loci)–यह ग्रन्थ दो भागों में वर्णित है।

यूक्लिड की अन्य कृतियाँ ज्योतिष, संगीत, चाक्षुषी (Optics) आदि पर हैं।

3. आर्यभट्ट (प्रथम)

यह पटना के समीप कुसुमपुर नामक नगर में सन् 476 ई० में पैदा हुए थे। इनके तीन ग्रन्थों का पता चलता है–दशगीतिका, आर्यभटीय और तन्त्र। इनमें आर्यभटीय सबसे प्रसिद्ध पुस्तक है। इसी नाम के एक अन्य ज्योतिष 950 ई० के लगभग हो गये, जिन्होंने **'महा-सिद्धान्त'** नामक पुस्तक की रचना की। इसलिए इन्हें आर्यभट्ट प्रथम कहेंगे।

इन्होंने अपने ग्रन्थ **'आर्यभटीय'** की रचना 499 ई० में कुसुमपुर जिले में की। इस जिले को आजकल पटना कहते हैं।

आर्यभटीय में 121 श्लोक हैं, जो चार खण्डों में विभाजित किये गये हैं– (i) गीत पादिका, (ii) गणित पाद, (iii) कालि क्रियापाद और (iv) गोलपाद।

'गोलपाद' बहुत छोटा ग्रन्थ है। इसमें कुल मिलाकर 11 श्लोक हैं, परन्तु इसमें इतनी सामग्री भर दी है जो **'सूर्य-सिद्धान्त'** के पूरे मध्याधिकार और कुछ स्पष्टीकरण में आयी है। इसमें आर्यभट्ट ने संक्षेप में संख्या लिखने की एक अनोखी रीति का निर्माण किया है, जो इस श्लोक से प्रकट होती है–

"वर्गाक्षराणि वर्गेऽवर्गेऽवर्गाक्षराणि कात्ङ्मौय।
खद्विनवके स्वरा नव वर्गेऽवर्गे नवान्त्यवर्गे वा।।"

अर्थ–'क' से आरम्भ करके वर्ग अक्षरों को वर्ग स्थानों में और 'अ' वर्ग अक्षरों को अवर्ग स्थानों में व्यवहार करना चाहिए। इस प्रकार ङ् म मिलकर य होता है, और वर्ग और अवर्ग स्थानों के 9 दूने शून्यों के 9 स्वर प्रकट करते हैं। यही क्रिया 9 वर्ग के अन्त के स्थानों तक दुहरानी चाहिए।

इकाई, सैकड़ा, दस हजार, एक लाख आदि विषम स्थान को वर्ग स्थान और दहाई, हजार, लाख आदि सम स्थानों को अवर्ग स्थान कहते हैं, क्योंकि 1,100, 1,00,000 के वर्गमूल पूर्णांक में जाने जाते हैं। परन्तु 20, 1,000, 10,00,000 आदि के वर्गमूल पूर्णांकों में नहीं जाने जा सकते हैं।

अंकगणित एवं रेखागणित

आर्यभट्ट पहले आचार्य हुए हैं जिन्होंने अपने ज्योतिष गणित में अंकगणित तथा बीजगणित एवं रेखागणित के प्रश्न दिये हैं। उन्होंने बहुत-से कठिन प्रश्नों को 30 श्लोकों में भर दिया है। एक श्लोक में श्रेणी गणित के 5 नियम आ गये हैं।

दूसरे श्लोक में दशमलव पद्धति का वर्णन है। इसके आगे के श्लोकों में वर्ग का क्षेत्रफल, त्रिभुज का क्षेत्रफल, शंकु का घनफल, वृत्त का क्षेत्रफल, गोले का घनफल, विषम चतुर्भुज के क्षेत्र के कर्णों के सम्पात् से दूरी और क्षेत्रफल तथा सब प्रकार के क्षेत्र की मध्यम लम्बाई और चौड़ाई जानकर क्षेत्रफल जानने के साधारण नियम दिये हुए हैं। एक जगह यह बताया गया है कि परिधि के छठवें भाग की ज्या उसकी त्रिज्या के समान होती है। एक श्लोक में बताया गया है कि वृत्त का व्यास 20,000 हो तो उसकी परिधि 62,832 होती है। इनमें परिधि तथा व्यास का सम्बन्ध चौथे दशमलव स्थान तक शुद्ध आ सकता है। आगे वृत्त, त्रिभुज तथा चतुर्भुज खींचने की रीति, लम्बक प्रयोग करने की रीति, किसी दीपक तथा उससे बने शंकु की छाया, दीपक की ऊँचाई तथा दूरी जानने की रीति, एक ही रेखा पर स्थिर तथा दीपक की दूरी में सम्बन्ध ज्ञात करना, जाना जा सकता है।

बीजगणित में साधारण नियम जैसे $(\text{क} + \text{ख})^2 - (\text{क}^2 + \text{ख}^2) = 2\,\text{क}\,\text{ख}$ तथा दो राशियों का गुणनफल जानकर और अन्तर जानकर राशियों को अलग-अलग करने की रीति, भिन्नों के हरों को सामान्य हरों में बदलने की रीति, भिन्नों में गुणा और भाग देने की रीति, जितनी बातें ये 12 श्लोकों में भर दी गयी हैं, लेकिन आजकल की परिपाटी की तरह पुस्तक बनायी जाय तो यही एक मोटा ग्रन्थ बन जायगा।

'आर्यभटीय' में त्रिकोणमिति का उल्लेख मिलता है। ज्या (sine) का प्रयोग सबसे पहले इसी ग्रन्थ में ही मिलता है। इसमें ज्या और उत्क्रमज्या (versed sine) की भी सारणियाँ दी हैं। इस ग्रन्थ में ज्या सारणी बनाने के लिए दो नियम दिये हैं, उनमें से एक इस प्रकार है–"पहली ज्या में से, उसको उसी से भाग देकर घटा दो इस प्रकार सारणीय ज्याओं का दूसरा अन्तर प्राप्त होगा। कोई-सा भी अन्तर निकालने के लिए उससे पिछले अन्तरों के जोड़ को पहली ज्या से भाग देकर उससे पिछले अन्तर में से घटा दो। इस प्रकार सारे अन्तर प्राप्त हो जायेंगे।

इन ज्यान्तरों को 'आर्यभटीय' के 'गीतिका पाठ' के 10वें श्लोक में वर्णित किया गया है, वह श्लोक इस प्रकार है–

'मखि भखि फखि धखि णखि भखि ड़खि हस्क स्वकिकिष्म श्धकि किघ्व।
घ्लकि किग्र हक्य धाहा स्त स्ग श्क ड़्व ल्क प्त फ छ कलार्धज्या।।

यथा–यदि सारणिक ज्याओं के अन्तर क्रमशः $a_1, a_2, a_3 ....,a_n$ हैं, तो उपर्युक्त सूत्र के अनुसार प्रत्येक 3° 45′ की वृद्धि के लिए।

$$a_1 + 1 = an - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{\text{ज्या } 3° 45'}$$

किन्तु ज्याओं के जो मान इस सूत्र में आते हैं, आर्य भट्ट ने ठीक वही मान अपनी सारणी में नहीं दिये हैं बल्कि अगले या पिछले पूर्णांक में उनको परिणत कर दिया है। सम्भवतः उन्होंने उपर्युक्त सूत्र से उनका निकटतम मान निकाला हो और फिर ज्ञात कोणों 30°, 45°, 60° आदि की ज्याओं से उनकी तुलना करके उनमें संशोधन कर दिया हो।

4. ब्रह्मगुप्त

ब्रह्मगुप्त गणित ज्योतिष के बड़े आचार्य हो गये हैं। प्रसिद्ध गणितज्ञ भास्कराचार्य ने इन्हें 'गणित चक्र चूड़ामणि' कहा है।

इनका जन्म पंजाब के अन्तर्गत भिलनालका नामक स्थान पर सन् 598 ई० में हुआ था। इनके पिता का नाम विष्णुगुप्त था। यह चापवंशी राजा के यहाँ रहते थे, परन्तु स्मिथ के अनुसार यह उज्जैन नगरी में रहा करते थे और वहीं पर इन्होंने कार्य किया। इन्होंने सन् 628 ई० में **ब्रह्म स्फुट सिद्धान्त** और सन् 665 में **खण्ड साधक** को बनाया था। इन्होंने **ध्यान ग्रहोपदेश** नामक ग्रन्थ भी लिखा है। ब्रह्म स्फुट सिद्धान्त में 21 अध्याय हैं, जिनमें गणित अध्याय तथा कुटखाध्यका उल्लेखनीय हैं। गणित अध्याय का उल्लेख गिनने तथा कुटखाध्यका में बीजगणित का उल्लेख किया है। इन्होंने अंकगणित, बीजगणित तथा रेखागणित–सभी गणितों पर प्रकाश डाला है और यह π का मान मानकर चले हैं। वर्गीकरण की विधि का वर्णन सर्वप्रथम ब्रह्मगुप्त ने ही किया है तथा विलोम विधि का वर्णन बड़ी अच्छी तरह से किया है। गणित अध्याय शुद्ध गणित में ही हैं। इसमें जोड़ना, घटाना आदि त्रैराशिक भाण्ड, प्रति भाण्ड आदि हैं। अंकगणित या परिपाटी गणित में है श्रेणी व्यवहार, क्षेत्र व्यवहार, त्रिभुज, चतुर्भुज आदि के क्षेत्रफल जानने की रीति, चित्र व्यवहार (ढाल-खाई आदि

के घनफल जानने की रीति), त्रैवाचिक व्यवहार, राशि व्यवहार (अन्न के ढेर का परिमाण जानने की रीति), छाया व्यवहार, (इसमें दोष, सम्बन्ध तथा उसके स्तम्भ की अनेक रीति) आदि 24 प्रकार के अध्याय इसी के अन्तर्गत हैं।

इन्होंने वृत्तीय चतुर्भुज के क्षेत्रफल निकालने के लिए सूत्र इस प्रकार दिया है–
यदि वृत्तीय चतुर्भुज की भुजाएँ a, b, c और d हैं तथा s उनका अर्द्ध-परिमाप है

तो चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

यदि वृत्तीय चतुर्भुज के विकर्ण x और y हों तो

$$x = \sqrt{\frac{ad+bc}{ad+cd}(ac+bd)}$$

और
$$y = \sqrt{\frac{ad+cd}{ac+bd}(ad+bd)}$$

इसके अतिरिक्त ब्रह्मगुप्त ने सूची स्तम्भ के छिन्नक के आयतनों के सूत्र भी दिये हैं। इन्होंने छिन्नक के आयतन के लिए तीन सूत्र भी दिये हैं–

(1) व्यावहारिक मान $M_2 = \left(\frac{\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}}{2}\right)^2 \times h$

जिसमें A_1 और A_2 आधारों के क्षेत्रफल हैं।

(2) औत्रमान (अधिक शुद्ध) $M_2 = \left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right) h$

(3) सूक्ष्म मान $= \frac{1}{3}(M_1 - M_2)\ M_3 = \frac{1}{3} + (M_1 + 2M_2)$

$$= \frac{h}{6}(A_1 + A_2) = \frac{h}{6}(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2$$

$$= \frac{h}{3}\left(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\right)$$

त्रिकोणमिति के विषय में भी इन्होंने उल्लेख किया है। इन्होंने ज्या के अर्थ में ही 'क्रमज्या' का प्रयोग किया है। इन्होंने एक ज्या सारणी भी दी है, जिसमें त्रिज्या 3270 ली है। ज्या का मान निकालने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया है–

$$\text{ज्या}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{1 - \text{ज्या}^2 - \frac{\theta}{2}}$$

5. महावीराचार्य

महावीराचार्य का जीवन-परिचय अन्य प्राचीन आचार्यों की भाँति अन्धकार के गर्त में छिपा हुआ है। अब तक खोजों से ज्ञात होता है कि वे राष्ट्रकूट वंश के महान् शासक अमोघवर्ष नृपतुंग के समकालीन थे। महावीराचार्य ने **गणित सार संग्रह, ज्योतिष-पटल तथा षट्त्रिंशंका** इत्यादि मौलिक एवं अभूतपूर्व ग्रन्थों की भी रचना की है जो कि ज्योतिष एवं गणित विषयों पर अपनी विषय-वस्तु के कारण महत्त्वपूर्ण हैं।

महावीराचार्य के इन ग्रन्थों को भारतीय गणित के क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण स्थान प्राप्त है। इसमें गणित संसार को जो देन मिली है, उनकी अनेक विद्वानों ने भूरि-भूरि प्रशंसा की है। हिन्दू गणित के सुप्रसिद्ध विद्वान डॉ० विभूतिभूषणदत्त ने अपने निबन्ध में मुख्य रूप से महावीराचार्य के त्रिभुज और चतुर्भुज-सम्बधी गणित का विश्लेषण किया है और बताया है कि इसमें अनेक ऐसी विषमताएँ हैं जो अन्यत्र कहीं नहीं मिलतीं। इसी प्रकार महावीराचार्य की प्रशंसा करते हुए डी० ई० स्मिथ 'गणित सार-संग्रह' के अंग्रेजी संस्करण की भूमिका में लिखते हैं कि त्रिकोणमिति तथा रेखागणित के मौखिक तथा व्यावहारिक प्रश्नों से यह भाषित होता है कि महावीराचार्य, ब्रह्मगुप्त और भास्कराचार्य में समानता तो है लेकिन फिर भी महावीराचार्य के प्रश्नों में इनसे अधिक श्रेष्ठता पायी जाती है।

महावीराचार्य ने गणित की प्रशंसा करते हुए 'गणित सार-संग्रह' में लिखा है—कामशास्त्र, अर्थशास्त्र, गान्धर्वशास्त्र, गायन, नाट्यशास्त्र, पाकशास्त्र, आयुर्वेद, वास्तुविद्या, छन्द, अलंकार, काव्यतर्क, व्याकरण इत्यादि में तथा कलाओं के समस्त गुणों में गणित अत्यन्त उपयोगी है। सूर्य आदि ग्रहों की गति को ज्ञात करने में, देश और काल को ज्ञात करने में, सर्वत्र गणित अंगीकृत है। द्वीपों, समूहों और पर्वतों की संख्या, व्यास और परिधि, लोक, अन्तर्लोक, स्वर्ग और नरक के रहने वाले सब के श्रेणीबद्ध भवनों, सभा एवं मन्दिरों के निर्माण गणित की सहायता से ही जाने जाते हैं। अधिक कहने से क्या प्रयोजन ? त्रैलोक्य में जो कुछ भी वस्तु है, उसका अस्तित्व गणित के बिना सम्भव नहीं हो सकता।

महावीराचार्य ने अंक-सम्बन्धी जोड़, बाकी, गुणा, भाग, वर्ग, वर्गमूल और घनमूल—इन आठों परिक्रमों का भी उल्लेख किया है। इन्होंने शून्य तथा काल्पनिक संख्याओं पर भी विचार व्यक्त किये हैं। गणित सार-संग्रह में 24 अंक तक की संख्या का उल्लेख किया है और उसको इस प्रकार नाम दिये हैं—एक, दस, शत, सहस्र, दश सहस्र, लक्ष, दशलक्ष, कोटि, दशकोटि, शतकोटि, अबुद, न्यर्बुद, खर्व, महाखर्व, पदम, महापद्म, क्षोणी, महाक्षोणी, शंख, महाशंख, क्षिति, महाक्षिति, क्षोभ, महाक्षोभ।

भिन्नों के भाग के विषय में महावीराचार्य की विधि विशेष उल्लेखनीय है। लघुत्तम समापवर्त्य की कल्पना पहले महावीर ने ही की थी।

महावीराचार्य ने युगपत् समीकरण (Simultaneous Equation) को हल करने का नियम भी दिया है। वर्ग समीकरण को व्यावहारिक प्रश्नों द्वारा समझाया है। इन्होंने इन प्रश्नों को दो भागों में विभाजित किया है। एक तो वे प्रश्न, जिनमें अज्ञात राशि के वर्गमूल का कथन होता है तथा दूसरे वे, जिनमें अज्ञात राशि के वर्ग का निर्देश रहता है।

पाटी गणित और रेखागणित के विचार से भी गणित सार-संग्रह में अनेक विशेषताएँ हैं। इन्होंने 'क्षेत्र-व्यवहार' प्रकरण में आयत को वर्ग और वर्ग आयत के रूप में बदलने की प्रक्रिया बतायी है। एक स्थान पर वृत्तों को वर्ग और वर्ग को वृत्तों में बदलने का भी उल्लेख है। इस ग्रन्थ में त्रिभुजों के कई भेद भी बताये गये हैं तथा समद्विबाहु त्रिभुज, विषमबाहु त्रिभुज, आयत, विषमकोण, चतुर्भुज, वृत्त तथा पंचमुख के क्षेत्रफल निकालने की रीति का वर्णन है। दीर्घवृत्त पर गहन अध्ययन करने में

महावीराचार्य ही एक हिन्दू गणितज्ञ थे। महावीराचार्य द्वारा गोले का आयतन-सम्बन्धी नियम बड़ा ही रोचक है।

गणित सार-संग्रह में बीजगणित सम्बन्धी भी अनेक सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया गया है। इसमें मूलधन, ब्याज, मिश्रधन और समय निकालने के सम्बन्ध में तथा भिन्न के सम्बन्ध में शेष मूल, भाग शेष-सम्बन्धी अनेक ऐसे नियमों का उल्लेख मिलता है, जो प्राचीन और आधुनिक गणित में बहुत महत्त्वपूर्ण हैं।

(1) गणित सार-संग्रह में n वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेकर संचय संख्या (Combinations) ज्ञात करने के लिए सामान्य सूत्र निम्नलिखित दिया है—

$$^{n}C_{r} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times ...... \times r}$$

इस सूत्र के आविष्कारक श्री महावीराचार्य जी प्रथम भारतीय गणितज्ञ ही नहीं, वरन् संसार के सर्वप्रथम गणितज्ञ थे।

इस प्रकार से हमें भाषित होता है कि गणितज्ञ महावीराचार्य की गणित को देन संसार की अमूल्य निधि है और उसकी प्रशंसा करना सूर्य के सामने दीपक दिखाना होगा।

6. श्रीधराचार्य

श्रीधर बीजगणित के आचार्य थे, जिनका उल्लेख भास्कराचार्य ने बीजगणित में कई जगह किया है। श्रीधराचार्य कर्नाटक प्रान्त के निवासी थे। इनकी माता का नाम अब्बोका तथा पिता का नाम वसुदेव शर्मा था। उन्होंने बचपन में अपने पिताजी के कन्नड़ तथा संस्कृत साहित्य का अध्ययन किया था। प्रारम्भ में ये शैव थे, किन्तु बाद में जैन अनुयायी हो गये। इनका समय दसवीं सदी का अन्तिम समय माना जाता है। इनकी पुस्तक का नाम **त्रिशतिका** है जिसकी एक प्रति पं० सुधारक द्विवेदी के मित्र राजा जी ज्योतिर्विद तथा गणित तरंगिनी के अनुसार राज्य पुस्तकालय में थी। इस पुस्तक में 300 श्लोक हैं जिनके एक श्लोक से विदित होता है कि यह श्रीधर के बड़े ग्रन्थ का सार है। यह प्रधानतः पाटी गणित की पुस्तक है, जिसमें श्रेणी व्यवहार, छाया व्यवहार आदि पर विचार किया गया है। सुधारक द्विवेदी का मत है कि **न्यायकंदली** के भी रचयिता श्रीधर आचार्य माने जाते हैं। उस ग्रन्थ की रचना 913 में की गयी थी। इसलिए श्रीधर आचार्य का समय भी 913 शक सम्वत् माना जाता है। लेकिन यह ठीक नहीं है, क्योंकि इस मत का समर्थन न तो दीक्षित और न डॉ० सिंह ही करते हैं। महावीर की **गणित सार-संग्रह** नामक पुस्तक में श्रीधर के कुछ वाक्य आये हैं जिनसे प्रकट होता है कि श्रीधर महावीर से पहले हुए थे, महावीर का समय दीक्षित मत से 775 शक तथा डॉ० सिंह के मत से 850 शक से होता है।

गणित सार में इनकी मुख्य देन अभिन्न, गुणक, भागाहार, वर्ग, वर्गमूलक, घन, घनमूल, भिन्न, समच्छेद, भाव जाति, प्रमाण जाति, भागानुबन्ध, त्रैराशिक, सप्त राशि, नव राशिक, भाण्ड, प्रतिभाण्ड, मिश्रण व्यवहार, भाव्यक व्यवहार सूत्र, सुवर्ण गणित प्रक्षेपक, समक्रय-विक्रय सूत्र, श्रेणी व्यवहार, क्षेत्र व्यवहार, स्वात व्यवहार, चितव्य व्यवहार, काष्ठ व्यवहार, राशि व्यवहार, छाया व्यवहार गणितों का निरूपण किया है। वृत्त, क्षेत्रफल, परिधि और व्यास का चतुर्थांश बताया गया है।

7. भास्कराचार्य द्वितीय

भास्कराचार्य का जन्म विदर में सन् 1114 ई० में हुआ था। विदर नगर आजकल हैदराबाद राज्य में पड़ता है। इनके पिता का नाम महेश्वर भट्ट था। महेश्वर भट्ट स्वयं वेदों तथा शास्त्रों के पण्डित थे। अपने पुत्र को प्रतिभाशाली जानकर उन्होंने उसका नाम भास्कराचार्य रखा।

भास्कराचार्य ने अपने पिता के लिखे हुए ग्रन्थों को पढा लेकिन उनकी रुचि गणित की ओर ही थी, उसी के अध्ययन में लग गये तथा ज्योतिष में ही इनका विकास हुआ। भास्कराचार्य का युग ज्योतिष विद्या का युग माना जाता है। उन्होंने उपपत्ति के सिद्धान्त भी निकाले परन्तु वह आज के युग में सफल नहीं हो सके।

इन्होंने वैसे तो अनेक ग्रन्थ लिखे, लेकिन मुख्यतः निम्नांकित हैं—

सिद्धान्त शिरोमणि, करण कौतूहल, समय सिद्धान्त शिरोमणि, गोल अध्याय रसगुण तथा सूर्य सिद्धान्त।

सिद्धान्त शिरोमणि चार भागों में विभाजित है तथा ये चारों भाग अनेक अध्यायों में विभाजित हैं। प्रथम खण्ड **लीलावती या पाटी गणित** के नाम से प्रचलित है। इनमें बड़े मनोरंजक ढंग से प्रश्न किये गये हैं।

'लीलावती' नामक ग्रन्थ की पश्चिम के विद्वानों ने भूरि-भूरि प्रंशसा की है।

इस गणित-ग्रन्थ का अकबर ने फैजी द्वारा फारसी में अनुवाद कराया था।

फैजी लिखता है कि लीलावती भास्कराचार्य की पुत्री थी और ज्योतिषियों ने भविष्यवाणी की थी कि लीलावती को कभी भी विवाह नहीं करना चाहिए, परन्तु भास्कराचार्य ने गणनाओं के आधार पर लीलावती के विवाह के लिए एक शुभ मुहूर्त खोज निकाला। समय-सूचना के लिए नाड़िका-यन्त्र स्थिर कर दिया। यह ताँबे का एक बर्तन होता है और इसके पेंदे में छोटा छिद्र होता है। धीरे-धीरे इस छिद्र में से बर्तन में पानी जमा होता है, जिससे समय की सूचना मिलती है। यह एक प्रकार की जल-घड़ी थी जिसका प्राचीन ज्योतिषी काल-गणना के लिए प्रयोग करते थे। लीलावती ने कौतूहलवश जब इस नाड़िका-यन्त्र में पानी चढ़ते हुए देखा तो उसके वस्त्र का एक मोती उस पात्र में गिर गया। मोती छिद्र के मुँह पर बैठ जाने से भीतर का पानी जाना रुक गया और इस प्रकार विवाह का शुभ-मुहूर्त निकल गया। पिता और पुत्री दोनों को बड़ा दुःख हुआ। लीलावती को सान्त्वना देने के लिए भास्कराचार्य ने उससे कहा, "मैं तुम्हारे नाम का एक ऐसा ग्रन्थ लिखूँगा जो अमर कीर्ति बन जायगा, क्योंकि सुनाम एक प्रकार का दूसरा जीवन ही तो है।"

कुछ लोगों का मत है कि लीलावती भास्कराचार्य की पत्नी थी, क्योंकि 'सखे' सम्बोधन भी मिलता है, परन्तु ग्रन्थ में अन्य सम्बोधन भी मिलते हैं, जैसे—मित्र, कुशल, गणक आदि। इसके आधार पर कुछ लोगों ने उपर्युक्त धारणा का खण्डन किया है। इस नामकरण के पीछे जो कुछ भी रहस्य रहा हो, लीलावती वास्तव में एक रोचक और सुलभ ग्रन्थ है। कुछ ऐसे भी उदाहरण हैं जो बुद्धि को झकझोर देने के लिए पर्याप्त हैं। इसी कारण किसी ने कहा है, "भास्कराचार्य के लिखे हुए को या तो स्वयं भास्कर ही समझ सकता है, या सरस्वती, या फिर ब्रह्मा; हमारे जैसे पुरुषों के वश की बात नहीं।"

इसके 'सूर्य-सिद्धान्त गणित' को ज्योतिष का बहुत बड़े महत्त्व का ग्रन्थ माना जाता है। अनेक विद्वानों ने इसकी टीका की है तथा अंग्रेजी में भी इसका अनुवाद हुआ है।

इसके द्वितीय खण्ड में बीजगणित धन-ऋण संख्या का योग, समीकरण आदि का वर्णन है।

इसका कर्ण भुजयोग के स्थान पर भुजमान निकालने का उदाहरण बड़ा ही स्वाभाविक है; जैसे—

एक बिल के ऊपर 9 हाथ ऊँचे पर एक मयूर बैठा हुआ था, उसने 27 हाथ की दूरी पर एक सर्प को स्तम्भ में स्थित बिल की ओर आते देखा और तिरछी चाल से उसकी तरफ झपटा तो बताओ मयूर ने बिल से कितनी दूरी पर सर्प को आते हुए पकड़ा ?

इसी प्रकार घन, क्षेत्रफल का विस्तृत वर्णन है।

भास्कराचार्य में दो गुण विशेष थे—एक तो वह परिश्रमी थे तथा दूसरे, वे बहुत उत्साह रखने वाले थे।

पाश्चात्य विद्वानों ने भी भास्कराचार्य की श्रेष्ठता को स्वीकार किया है। **डॉ० स्पीडवुड** ने रॉयल सोसायटी के जर्नल में लिखा है, "भास्कराचार्य ने जिन गणित-ज्योतिष सिद्धान्तों की स्थापना की है और जिस दर्जे से की है, उसकी तुलना हम आधुनिक गणित ज्योतिष-शास्त्र से कर सकते हैं।"

8. सर आइजक न्यूटन

इस महान् गणितज्ञ का जन्म 25 दिसम्बर, सन् 1642 ई० में बूल्सथोर्य नामक गाँव में, जो कि इंग्लैण्ड में है, हुआ था। न्यूटन के जन्म से पहले ही उसके पिता की मृत्यु हो गयी थी। असहाय न्यूटन की माता ने पुत्र को दादी के संरक्षण में छोड़कर पुनर्विवाह कर लिया था। न्यूटन का जीवन असफलताओं के गर्भ में समाकर सफलता के शिक्षर पर चढ़ा। उन्होंने अपनी उच्च शिक्षा केम्ब्रिज विश्वविद्यालय के ट्रिनिटी कॉलेज में प्राप्त की। अल्प शिक्षाकाल में ही सामाकलन तथा अवकलन गणित (Integral Differential Calculus) की रचना की, जिसने उनको अमरत्व प्रदान किया। तत्पश्चात् महामारी के कारण सन् 1665 ई० में कॉलेज बन्द हो गया और न्यूटन की शिक्षा अधूरी ही रह गयी; परन्तु न्यूटन हताश न हुआ और घर आकर लक्ष्य-प्राप्ति की चेष्टा में लीन हो गया।

एक दिन बगीचे में बैठे हुए उसने सेव के फल को नीचे गिरते हुए देखा और विचार करने लगा कि यह फल पृथ्वी पर ही क्यों गिरा, आकाश की ओर क्यों नहीं उड़ गया। उसने अपने विचारवान मस्तिष्क की सहायता से यह फल निकाला कि पृथ्वी के अन्दर आकर्षण शक्ति है, जो सांसारिक वस्तुओं को अपनी ओर आकर्षित करती है। यह सिद्धान्त 'गुरुत्वाकर्षण का सिद्धान्त' कहलाता है। द्वितीय प्रमेय (Bionomial Theorem) न्यूटन की अनुपम देन है जिसने जटिल-से-जटिल गणना को भी सरल बना दिया है। इन्होंने गति-विज्ञान (Dynamics) के समीकरण तथा पदार्थ, विश्राम (Rest) तथा गतिशील (Motion) के नियम प्रतिपादित किये।

इन शोध-कार्यों ने न्यूटन का नाम महान् गणितज्ञों की श्रेणी में ला दिया, और अपनी अतुल्य योग्यता के कारण ही रॉयल सोसायटी का सभापति चुना गया। इस

महत्त्वपूर्ण पद पर इसने परिश्रम और लगन के साथ 24 वर्षों तक कार्य किया। इसी समयान्तर में न्यूटन ने 'प्रिंसपिया' नामक पुस्तक प्रकाशित की, जिसने उसको वैज्ञानिक क्षेत्र में अमर बना दिया। महापुरुषों में दयालुता की मात्रा अधिक नहीं होती परन्तु न्यूटन की दयालुता गौरवमयी थी; जिसका आभास इस घटना में मिलता है।

एक बार वह अपने महत्त्वपूर्ण कागजों को, जो उसके वर्षों के कठोर परिश्रम के द्योतक थे, रखकर बाहर चला गया। रात्रि का समय था, मोमबत्ती जल रही थी, पास ही में न्यूटन का प्यारा कुत्ता 'डायमण्ड' बैठा था। उसने अज्ञानता के वशीभूत होकर मेज पर एक छलांग भरी। कागज जलकर राख हो गये। जैसे ही न्यूटन ने कमरे में प्रवेश किया तो उसने अप्रत्याशित घटना को देखकर यह शब्द कहे, "डायमण्ड, तू नहीं जानता कि तूने मेरा कितना नुकसान किया।"

न्यूटन कितना परिश्रमी था, उसका अनुमान हम इस घटना से कर सकते हैं। एक बार उसका मित्र स्टू-ले उससे मिलने आया। उसने न्यूटन को व्यस्त देखा तो उसका ध्यान बँटाना न चाहा और उसका खाना जो मेज पर रखा था, खा लिया। अतः न्यूटन को कटोरदान खाली मिला तो उसने कहा, "अरे ! मैं तो समझे बैठा था कि मैंने खाना नहीं खाया, मैंने तो खाना खा लिया है।"

न्यूटन में अभिमान की भावना लेशमात्र भी न थी, इसकी परिचायक उसकी निम्न पंक्तियाँ हैं–

"मैं नहीं जानता, संसार मुझे क्या समझेगा। मैं तो अपने आपको समुद्र के किनारे बालक के समान पाता हूँ जो अपने विनोद के लिए समुद्र के किनारे की सीपियाँ और घोंघे बीनता फिर रहा है। जबकि सत्य का अगाध तथा असीम समुद्र बिना खोजा हुआ पड़ा है।"

सर आइज़क न्यूटन न केवल वैज्ञानिक या गणितज्ञ ही थे, बल्कि वह एक समाजोद्धारक भी थे। यदि हम यह विचार करें कि इस धरा पर न्यूटन का प्रादुर्भाव न हुआ होता, तो क्या होता ? सम्भवतः आज की सभ्य मानव जाति आधुनिक दशा में न पहुँच पाती, क्योंकि सम्पूर्ण वैज्ञानिक क्षेत्र अछूता रह जाता। अतएव न्यूटन समाजोद्धारक भी था, इसमें सन्देह नहीं। जब तक मानव जाति इस जगत में विचरण करती रहेगी, न्यूटन का नाम आदरपूर्वक लिया जाता रहेगा।

9. गाउस
(GAUSS)

कार्ल फ्रेडरिक गाउस नामक महान् गणितज्ञ जर्मनी में पैदा हुआ था। इसका कार्य 1777 ई० से 1855 ई० तक था। यह प्रारम्भ से ही निर्धनता में पला था। इसके पिता राज-मजदूरी का काम करते थे। उनमें कोई प्रतिभा नहीं थी। वह तो यही चाहते थे कि उनका पुत्र भी मजदूर बने और उनकी यदि चली होती तो गाउस इससे ज्यादा न हो पाता परन्तु इसकी माँ को पुत्र से बड़ी-बड़ी आशाएँ थीं। एक दिन उसने गाउस के मित्र, 'बोलियै' से पूछा कि उसके विचार से गाउस बड़ा होकर क्या होगा। 'बोलियै' ने उत्तर दिया, 'यूरोप का सबसे बड़ा गणितज्ञ' और उसका अनुमान ठीक ही निकला। सौभाग्य से गाउस तत्कालीन राजा का कृपापात्र हो गया। अतः इसकी शिक्षा राजा की देखरेख में हुई। जीवन के प्रारम्भ में यह बालकों को ट्यूशन पढ़ाकर जीवन-निर्वाह करता रहा। 1807 में जब गटिंगटन में एक वेधशाला की स्थापना हुई, यह उसका निदेशक (Director) और ज्योतिष का प्राध्यापक नियुक्त हुआ।

गाउस के बचपन की कुछ घटनाएँ उल्लेखनीय हैं। यह करीब तीन वर्ष की उम्र का बालक था तब एक दिन इसके पिता मजदूरों का हिसाब कर रहे थे। यह ध्यान से सुन रहा था तभी एकदम बोल उठा, "हिसाब में गलती है, पैसा इतना नहीं इतना होना चाहिए।" पिता ने हिसाब की जाँच की तो लड़के की बात सही निकली।

गाउस जब 10 वर्ष की अवस्था में था, तब स्कूल के प्रधानाचार्य 'बटलर' ने एक दिन सारी कक्षा को जोड़ का एक प्रश्न दिया, जो इस प्रकार था–

81297 + 81495 + 81693 +....+ 100 पदों तक योग निकालो।

उन लड़कों में से किसी को भी समान्तर श्रेणी (A. P.) का ज्ञान नहीं था। जैसे ही प्रश्न बोलकर समाप्त हुआ, गाउस ने तुरन्त उसका उत्तर लिखकर स्लेट मेज पर रख दी, परन्तु अन्य कोई भी विद्यार्थी उक्त प्रश्न को पूरे घण्टे में भी हल न कर पाया। क्योंकि समान्तर श्रेणी के ज्ञान के अभाव में पहले 100 पद लिखने थे और उनका योग निकालना था। गाउस का उत्तर ठीक निकला। उस दिन से बटलर गाउस पर दयालु हो गया और उसने अपनी जेब से गाउस को अंकगणित की एक पुस्तक खरीद कर दी। गाउस के विषय में वह प्रायः कहा करता था, "इस लड़के को मैं और कुछ नहीं पढ़ा सकता।"

जब गाउस विश्वविद्यालय में पढ़ता था, तभी 'न्यूनतम वर्गों के सिद्धान्त' (Theory of Least Squares) का भाव इसके मन में अंकुरित हुआ तथा उन्हीं दिनों उसने यह साध्य की कि "किसी वृत को यूक्लिड की विधि से 17 बराबर भागों में बाँटा जा सकता है।" 1801 ई० में संख्या सिद्धान्त (Theory of Numbers) पर इसका प्रसिद्ध ग्रन्थ प्रकाशित हुआ। इसके बाद इसने शुद्ध गणित पर अनेक अभिपत्र (Research Articles) लिखे। इसी ने सबसे पहले अन्यूक्लिडी ज्यामिति को जन्म दिया।

गाउस की प्रतिभा बहुमुखी थी। इसने सारणिकों (Determinants) और काल्पनिक राशियों (Imaginary Numbers) का विस्तृत उपयोग किया। द्विपद समीकरणों (Binomial Equations) के हल (Solution) निकाले। अनन्त श्रेणियों के अभिसरण (Convergence of Infinite Series) के कठिन परीक्षणों (Rigorous Tests) का आविष्कार किया तथा दीर्घकाल फलनों की द्विकावर्तता (Double periodicity of Elliptic Functions) सिद्ध की। इन विषयों पर इसका शोध कार्य इतना मौलिक और महत्त्वपूर्ण रहा कि इसे आधुनिक गणितीय विश्लेषण के तीन महान् विद्वानों में गिना जाता है। इसके अतिरिक्त ज्योतिष, चुम्बकत्व, विद्युत्व और भूमिति पर भी इसका महत्त्वपूर्ण अनुसन्धान हुआ है।

इसकी सबसे प्रसिद्ध पुस्तक 'डिस्क्वीजीशनिस' है; जिसके सात भाग हैं। पहले तीन भागों से सशेषता सिद्धान्त (Theory of Congruencies) का प्रतिपादन किया गया है। चौथे भाग में वर्गात्मक अवशेष सिद्धान्त (Theory of Quadratic Residues) का वर्णन है। पाँचवें भाग में द्विवर्णक वर्गात्मक रूप (Binary Quadratic Residues) दिये गये हैं। छठवें और सातवें भागों में बीजगणितीय समीकरणों पर उपरिलिखित सिद्धान्तों का प्रयोग किया गया है। यह पुस्तक 1801 ई० में छपी थी।

10. डॉ० गणेशप्रसाद

डॉ० गणेशप्रसाद जी का जन्म 15 नवम्बर, 1876 ई० को बलिया नगर में हुआ। गणेशप्रसाद जी के पिताजी तथा उनके दादा बलिया के प्रसिद्ध कानूनगो थे। उनके परदादा भी प्रसिद्ध कानूनगो थे।

गणेशप्रसाद जी की पढ़ाई बलिया जिला स्कूल से प्रारम्भ हुई। पाँचवीं कक्षा में वे गणित में फेल हो गये, इससे उनको बड़ी ठेस पहुँची और उन्होंने कठिन परिश्रम करके एण्ट्रेंस की परीक्षा प्रथम श्रेणी में उत्तीर्ण की।

बड़े जमींदार व खानदानी कानूनगो के पुत्र होने के कारण गणेशप्रसाद जी का विवाह 9 साल की आयु में लोदीपुर जिला सादाबाद के वकील, मुन्शी डौमनलाल की पुत्री नन्दकुमारी से हुआ।

गणेशप्रसाद जी ने म्योर सेण्ट्रल कॉलेज से गणित में एम० ए० पास किया। एम० ए० पास करने के पश्चात् प्रयाग विश्वविद्यालय से गणित की डॉक्टरी परीक्षा पास की। गणित में डी० एस-सी० की परीक्षा पास करने वाले यह पहले व्यक्ति थे।

उनका सबसे बड़ा महान् कार्य था—आगरा विश्वविद्यालय की नींव डालना। एक वर्ष को छोड़कर वह जीवन भर सीनेट के सदस्य रहे और कई कमेटियों के सदस्य रहे। सभी कमेटियों में वे पूरी तैयारी के साथ जाते थे।

डॉ० गणेशप्रसाद ने गणित-सम्बन्धी अपनी भौतिक अन्वेषणाएँ अपने विद्यार्थी जीवन से ही आरम्भ कर दी थीं। उन्होंने अपने खोज-निबन्ध लिखे। उनका पहला खोज-निबन्ध 'दैर्घ्य फलों' (Elliptic Functions) और गोलीय हरात्मक (Spherical Harmonics) का 'मैसेन्जर ऑफ मैथमैटिक्स' नामक पत्र में छपा था। उन्होंने विद्वानों की भूल निकाली और उनको चैक किया।

1932 में आप भारतीय विज्ञान कांग्रेस के गणित और भौतिक विज्ञान के सभापति मनोनीत हुए। निबन्धों के अतिरिक्त आपने उच्चकोटि के 11 भौतिक गणित ग्रन्थों की रचना की जिनमें से कई भारत में ही नहीं बल्कि विदेशों की उच्च कक्षाओं में पाठ्य-पुस्तकों के रूप में पढ़ाये जाते हैं। आप केम्ब्रिज के शिक्षकों और विद्यार्थियों में एक योग्य गणितज्ञ की हैसियत से प्रतिष्ठित हो चुके थे। केम्ब्रिज की डिग्री लेकर डॉ० गणेशप्रसाद जर्मनी के गार्टजन नगर के विद्यापीठ में जाकर हिलबर्ट और जेमरफील्ड सरीखे गणिताचार्यों के पास गणित की परिशीलन करने लगे। गणेशप्रसाद जी का यश संसार-भर में फैल गया।

विलायत से लौटने के पश्चात् प्रयाग के म्योर सेण्ट्रल कॉलेज में प्राध्यापक नियुक्त किये गये। डॉक्टर साहब समय के बड़े पाबन्द थे। वे बरसात के दिनों में दो घोड़ों वाली गाड़ी में कॉलेज जाते थे और यदि गाड़ी वाला समय पर नहीं आता था तो वह पैदल ही चल देते थे।

9 मार्च, 1935 को आगरा में यूनीवर्सिटी काउन्सिल 11 बजे से थी। डॉ० साहब 8 मार्च की रात्रि को रवाना होकर 9 मार्च की सुबह आगरा पहुँचे। होटल में भोजन आदि के बाद पौने ग्यारह बजे यूनीवर्सिटी पहुँचे। यहाँ पर उनको अधिक बोलना पड़ा। कानपुर के कृषि के दो छात्रों को बी० एस०-सी० में बैठने की अनुमति दिलवानी थी। फिर कुछ परीक्षकों की नियुक्ति के बारे में बोलना पड़ा। वाद-विवाद के बाद वह

कुर्सी पर बैठ गये और उठ न सके। शाम को $7\frac{1}{2}$ बजे आगरा के थामसन अस्पताल में, जो आजकल S. N. Hospital कहलाता है, उनकी मृत्यु हो गयी।

11. रामानुजन्

श्री निवास रामानुजन् का जन्म तमिलनाडु प्रान्त के इरोद नामक ग्राम में एक निर्धन ब्राह्मण परिवार में 22 दिसम्बर, 1887 ई० को हुआ। इनके पिता कुम्भकोनम् ग्राम के निवासी थे और वहीं पर एक कपड़े वाले के यहाँ मुनीमी करते थे।

रामानुजन् के जन्म के बारे में एक किंवदन्ती प्रचलित है। कहा जाता है कि विवाह होने के कई वर्ष बाद तक उनकी माता के कोई सन्तान नहीं हुई। इससे वह सदैव चिन्तित रहती थी। अपनी पुत्री को चिन्ताकुल देखकर राजानुजन् के नाना ने नामकल गाँव में जाकर वहाँ की नामागिरि देवी की आराधना की, उसी के फलस्वरूप श्रीनिवास रामानुजन् का जन्म हुआ।

5 वर्ष की आयु में रामानुजन् को स्कूल भेजा गया। वहाँ पर दो वर्ष पढ़ने के बाद वह कुम्भकोनम् हाईस्कूल में पढ़ने भेजे गये। उन्हें गणितशास्त्र में बड़ी दिलचस्पी थी। अपने साथियों और अध्यापकों से कभी वह नक्षत्रों के बारे में कुछ पूछ बैठते थे तो कभी परिधि के बारे में। जब वह तीसरे दर्जे में पढ़ते थे तो एक दिन अध्यापक समझा रहे थे कि किसी संख्या को उसी संख्या से भाग देने पर भजनफल एक होता है। रामानुजन् ने फौरन पूछा, "क्या यह नियम शून्य[1] के लिये भी लागू होता है ?" इसी दर्जे में बीजगणित की तीनों श्रेणियाँ—समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी, जो कि आजकल इण्टरमीडिएट कक्षाओं में पढ़ाई जाती है—पढ़ लिया था, चौथे दर्जे में त्रिकोणमिति तथा पाँचवें दर्जे में ज्या और कोज्या का विस्तार समाप्त कर लिया था।

17 वर्ष की आयु में रामानुजन् ने हाईस्कूल परीक्षा अच्छे नम्बरों से पास की, जिससे उन्हें सरकारी छात्रवृत्ति प्रदान की गयी। परन्तु कॉलेज की प्रथम साल तक पहुँचते-पहुँचते वह गणितशास्त्र में इतने लवलीन हो गये कि गणित के सिवाय और किसी काम के न रहे और परिणाम यह हुआ कि ये फेल हो गये। इससे इनकी छात्रवृत्ति रोक दी गयी। अतः आर्थिक स्थिति के खराब होने के कारण इनको अपनी विश्वविद्यालय की शिक्षा खत्म करनी पड़ी।

उन दिनों रामानुजन् को आर्थिक कठिनाइयों ने परेशान कर दिया। इसी समय इनका विवाह भी कर दिया गया। विवाह हो जाने पर कठिनाइयाँ दोगुनी हो गयीं और वह शीघ्र नौकरी ढूँढ़ने के लिए मजबूर हो गये।

बड़ी कठिनाइयों के बाद इनको मद्रास ट्रस्ट में 30 रु० मासिक की नौकरी मिल गयी। इसी बीच डॉ० वाकर गणित में उनकी दिलचस्पी से बहुत प्रभावित हुए। उनके प्रयत्न से रामानुजन् को मद्रास विश्वविद्यालय से दो वर्ष के लिए 75 रु० मासिक छात्रवृत्ति मिल गयी तथा इनको क्लर्की से छुटकारा मिल गया और आर्थिक चिन्ताओं से मुक्त होकर उन्हें अपना सारा समय गणित के अध्ययन में लगाने का सुअवसर प्राप्त हो गया।

---

1. शून्य-से-शून्य को भाग देकर भजनफल एक न होकर अनिर्णीत (Indeterminate) होता है।

जब आपने अपने कुछ लेख ट्रिनिटी कॉलेज के गणित के फैलो डॉ० हार्डी के पास भेजे तो इन लेखों को देखकर डॉ० हार्डी तथा दूसरे अंग्रेज गणितज्ञ बड़े प्रभावित हुए। अतः ये लोग रामानुजन् को केम्ब्रिज बुलाने का प्रयत्न करने लगे।

सन् 1941 ई० में जब ट्रिनिटी कॉलेज के फैलो डॉ० नौविल भारत आये तो डॉ० हार्डी ने उनसे रामानुजन् से मिलने तथा उनको केम्ब्रिज लाने का अनुरोध कर दिया था। भारत आने पर प्रो० नौविल ने रामानुजन् से भेंट की। उन्होंने नौविल महोदय की प्रार्थना को स्वीकार कर लिया। इस पर नौविल साहब ने उनको 250 पौण्ड की छात्रवृत्ति देने के अतिरिक्त व्यय तथा यात्रा व्यय देना भी स्वीकार कर लिया। इससे 60 रु० प्रतिमाह अपनी माता को देने का प्रबन्ध करके 17 मार्च, 1847 ई० को मि० नौविल के साथ रवाना हो गये।

20 फरवरी, 1918 को आप रॉयल सोसायटी के फैलो बनाये गये। यह सम्मान प्राप्त करने वाले आप पहले भारतीय ही थे। 27 फरवरी, 1919 को आप लन्दन से भारत के लिए रवाना हुए और 27 मार्च को आप बम्बई पहुँचे। विदेश में रहने और जलवायु अनुकूल न होने से आप बहुत कमजोर हो गये।

स्वास्थ्य खराब होने से इनको कावेरी कोदू मण्डी ले जाया गया। वहाँ से वे कुम्भकोनम् ले जाये गये। इनका स्वास्थ्य दिन-पर-दिन बिगड़ता ही गया। लेकिन मस्तिष्क का प्रकाश अन्त तक मन्द नहीं हुआ। मृत्यु तक वह काम में लगे रहे। Mock Theta Functions पर उनका सब काम मृत्यु-शैय्या पर ही हुआ। हालत खराब होती देखकर वे मद्रास ले जाये गये। 26 अप्रैल, 1920 ई० को मद्रास के पास चेतपुर ग्राम में इस विश्वविख्यात गणितज्ञ का स्वर्गवास हो गया।

12. प्रो० बी० एन० प्रसाद

प्रो० बी० एन० प्रसाद का जन्म मुहम्मदाबाद, गोहाना, जिला आजमगढ़, उत्तर प्रदेश में हुआ। उनकी प्रारम्भिक शिक्षा मुहम्मदाबाद, इलाहाबाद तथा सिवान में हुई। उनकी शिक्षा पटना कॉलेज तथा काशी हिन्दू विश्वविद्यालय में हुई। उन्होंने लिवरपूल विश्वविद्यालय में गणित के धुरन्धर आचार्य स्वर्गीय ई. सी. टिप्समार्श एफ० आर० एस० के पथ-प्रदर्शन में अनुसन्धान कार्य किया और 1931 में पी-एच० डी० की डिग्री प्राप्त की। सन् 1942 में उन्होंने पेरिस विश्वविद्यालय से डी० एस-सी० की डिग्री प्राप्त की। वहाँ पर उन्होंने प्रो० दाहूजा के संरक्षण में कार्य किया।

उस अवधि में प्रायः दो वर्षों के लिए प्रो० प्रसाद ने काशी हिन्दू विश्वविद्यालय में सहायक प्राध्यापक का कार्य किया। उन्होंने इलाहाबाद विश्वविद्यालय में रीडर तथा प्रधान के रूप में भी सेवा की तथा वह पटना साइन्स कॉलेज में भी गणित के प्रधान होकर गये।

प्रो० प्रसाद ने अपने स्वर्गीय गुरु गणेशप्रसाद की सलाह से थोड़े वेतन पर कार्य करते हुए भी तथा उस पर कोई ध्यान न देते हुए गणित क्षेत्र में अन्वेषण करना चालू कर दिया। उन्होंने फेरियर श्रेणी तथा अन्य श्रेणियों की आकलनीयता पर अन्वेषण चालू कर दिया। इंगलैण्ड में प्रो० एम० हिटेकर के साथ उन्हें आकलनीयता की एक विधि ज्ञात करने तथा निरपेक्ष विधि का श्रेय प्राप्त है। उनकी इस भौतिक गवेषणा के कारण शीघ्र ही संसार के गणितज्ञों का ध्यान आकर्षित हो गया।

विदेश यात्रा से लौटने पर सन् 1932 से प्रो० प्रसाद ने योग्य विद्यार्थियों को गणित में गवेषणा करने के लिए प्रोत्साहित किया। इनकी देखभाल में 14 थीसिस, 4 डी० एस-सी० तथा 10 डी० फिल तैयार हो चुकी है। प्रो. प्रसाद ने गणित की संस्थाओं के सदस्य रहकर देश की अपूर्व सेवा की है। देश के विज्ञान के नेशनल इन्स्टीट्यूट तथा राष्ट्रीय अकादमी के सबसे पुराने फैलो वर्ग में से एक होने के साथ प्रो० प्रसाद को भारतीय विज्ञान कांग्रेस के गणित तथा सांख्यिकी वर्ग का अध्यक्ष 1945 तथा दो बार उनके जनरल सेक्रेटरी तथा नेशनल अकादमी के भौतिक विज्ञान विभाग के अध्यक्ष होने का सम्मान 1960 में भी प्राप्त हुआ।

प्रो० वी० एन० प्रसाद ने अनेक बार अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलनों में भाग लिया था। प्रो० प्रसाद उस शिष्ट मण्डल के सदस्य थे, जिसका नेतृत्व हमारे भूतपूर्व राष्ट्रपति डॉ० राधाकृष्णन् ने किया था। उन्होंने विदेशों के काफी विश्वविद्यालयों में भाषण दिया था उनको गणित के नियमों के बारे में बताया।

विश्वविद्यालय अनुदान आयोग द्वारा नियुक्त गणित रिव्यू कमेटी के सदस्य के रूप में गणित के अध्यापन तथा गवेषणा कार्य की वृद्धि तथा उन्नति के लिए उपाय, साधन ज्ञात करने में भारत सरकार की सहायता प्राप्त करने का भी उन्हें श्रेय प्राप्त है।

उन्होंने गणितशास्त्र की उन्नति के लिए इलाहाबाद पुस्तकालय में काफी पुस्तकें मँगवाई तथा इलाहाबाद मैथमैटिक सोसायटी की स्थापना की, जिसका उद्देश्य है—गणित में उच्च स्तरीय अध्ययन तथा अनुसन्धान कार्य को बढ़ाना। उन्होंने 'इण्डियन जर्नल ऑफ मैथमैटिक' नाम की एक अन्तर्राष्ट्रीय पत्रिका का प्रकाशन भी किया।

अतः यह कहना अतिशयोक्ति नहीं होगी कि गणित के सत्य की खोज करने वाले हम जैसे विद्यार्थियों की दृष्टि में तो उनका स्थान उन लोगों के बीच ऊँचा रहेगा जिन्होंने मनुष्य की उस आत्मा को ऊँचा उठाया है जो दुर्भाग्य से भी टक्कर ले लेती है, पर झुकने को प्रस्तुत नहीं होती।

13. लीलावती

लीलावती भास्कराचार्य की पुत्री थी। लीलावती के जीवन के सम्बन्ध में एक रोचक कथा है। ज्योतिषियों ने भविष्यवाणी की थी कि लीलावती को कभी भी विवाह नहीं करना चाहिए, परन्तु भास्कराचार्य ने गणनाओं के आधार पर लीलावती के विवाह के लिए एक शुभ मुहूर्त खोज निकाला। समय-सूचना के लिए नाड़िका यन्त्र स्थिर कर दिया। यह ताँबे का एक बर्तन होता है और इसके पेंदे में एक छोटा छिद्र होता है। धीरे-धीरे इस छिद्र में से बर्तन में पानी जमा होता है, जिससे समय की सूचना मिलती है। यह एक प्रकार की जल-घड़ी थी जिसका प्राचीन ज्योतिषी काल गणना के लिए प्रयोग करते थे। लीलावती ने कौतूहलवश जब इस नाड़िका यन्त्र को पानी चढ़ते हुए देखा तो उसके वस्त्र में लगा एक मोती उस पात्र में गिर गया। मोती छिद्र के मुँह पर बैठ जाने से भीतर का पानी जाना रुक गया और इस प्रकार विवाह का शुभ-मुहूर्त निकल गया। पिता और पुत्री दोनों को बड़ा दुःख हुआ। लीलावती को

सांत्वना देने के लिए भास्कराचार्य ने उससे कहा, "मैं तुम्हारे नाम का एक ऐसा ग्रन्थ लिखूँगा जो अमर कीर्ति बन जायेगा, क्योंकि सुनाम एक प्रकार का दूसरा जीवन ही तो है।

कुछ लोगों का मत है कि लीलावती भास्कराचार्य की पत्नी थी, क्योंकि 'सखे' सम्बोधन भी मिलता है, परन्तु ग्रन्थ में अन्य सम्बोधन भी मिलते हैं, जैसे—मित्र, कुशल, गणक आदि। इसके आधार पर कुछ लोगों ने उपर्युक्त धारणा का खण्डन किया है। इस नामकरण के पीछे जो कुछ भी रहस्य रहा हो, लीलावती वास्तव में एक रोचक और सुलभ ग्रन्थ है। कुछ ऐसे भी उदाहरण हैं, जो कि बुद्धि को झकझोर देने के लिए पर्याप्त हैं। लीलावती के नाम पर लिखा गया ग्रन्थ प्रथम खण्ड लीलावती या पाटी गणित के नाम से प्रसिद्ध है। इसमें बड़े मनोरंजक ढंग से प्रश्न किये गये हैं।

'लीलावती' नामक ग्रन्थ की पश्चिम के विद्वानों ने भूरि-भूरि प्रशंसा की है। इस गणित ग्रन्थ का अकबर ने फैजी द्वारा फारसी में अनुवाद कराया था। लीलावती ग्रन्थ में एक बहुत ही रोचक प्रश्न कर्ण भुज योग के स्थान पर भुजमान निकालने का बड़ा ही स्वाभाविक उदाहरण दिया है—एक बिल के ऊपर 9 हाथ ऊँचे पर एक मयूर बैठा हुआ था, उसने 27 हाथ की दूरी पर एक सर्प को स्तम्भ में स्थित बिल की ओर आते देखा गया और तिरछी चाल से उसकी तरफ झपटा तो बताओ मयूर ने कितनी दूरी पर सर्प को आते हुए पकड़ा ?

लीलावती नामक ग्रन्थ भास्कराचार्य का सर्वश्रेष्ठ ग्रन्थ है। इसमें अंकगणित, बीजगणित और ज्यामिति के ग्रन्थों का प्रतिपादन किया है।

लीलावती का अंग्रेजी अनुवाद सन् 1816 में टेलर (Taylor) ने किया था। लीलावती में पूर्णांक और भिन्न, त्रैमासिक ब्याज, व्यापार गणित, मिश्रण, श्रेणियाँ, क्रमचय (Permutation) के सम्बन्ध में जानकारी दी है। लीलावती स्वयं एक विद्वान एवं योग्य थी उसकी विद्वत्ता की चर्चा बहुत दूर तक फैली थी।

[ब]

गणितीय संकेतन

(Mathematical Notations)

पूर्वाभास—मानवीय जीवन में संकेत की महत्ता प्रायः देखी जाती है। भाषा ने जब शब्दों की पकड़ नहीं की थी तब भी अभिव्यक्ति (Expression) होती रहती थी। यह अभिव्यक्ति केवल संकेतों की परम कृपा के कारण ही थी—यह सर्वविदित ही है। यदि कहा जाये कि भाषा का जन्म ही संकेतों से हुआ है तो असंगति न होगी। जीवन में गणित का अपना विशिष्ट महत्त्व है। क्योंकि मानव अपनी आँखें खोलते ही गण (गिनना) के चक्कर में फँस जाता है। यह चक्कर इतना सरल तो नहीं कि आसानी से समझ सकें। परन्तु कुछ ऐसे साधन हैं जो इस कार्य को सरल बना देते हैं; वे हैं—गणितिक संकेत। इसी गणितिक सांकेतिकता के विकास पर विचार करना हमारा परम लक्ष्यमय कर्त्तव्य है।

ये वे संकेत होते हैं जो क्रिया को व्यक्त करने में, किसी गणितीय राशि को दर्शाने में अथवा गणित में प्रायः प्रयुक्त होने वाली गणितीय राशि को निर्दिष्ट करने के लिए प्रयुक्त किये जाते हैं। यथा $a \div b$ में भाग का चिन्ह (÷) निर्दिष्ट करता है कि a में b का भाग देना है, $a < b$ में असमता का चिन्ह (<) a का b से छोटे होने का सम्बन्ध दर्शाता है। इन संकेतों की सहायता से गणित के तर्क संक्षिप्त रूप से लिखे जा सकते हैं और पाठक सूक्ष्म तर्कसंगत भाषा की सहायता से जटिल सम्बन्धों को सरलता से समझ लेता है।

प्राचीन हस्तलिखित ग्रन्थों में विभिन्न संकेत मिलते हैं, किन्तु समय के साथ उन सब में परिवर्तन हुए और वे अनेक रूपान्तर के बाद वर्तमान रूप में आये।

धन और ऋण के चिन्ह—सन् 1960 ई० के लगभग बोहीमिया के एक नगर में जॉनविड्मैन नामक एक गणितज्ञ हुआ है। इसने अंकगणित और बीजगणित पर पुस्तकें लिखी हैं। सबसे पहले इसी से मुद्रित पुस्तक में + और – चिन्हों का प्रयोग किया है। पुस्तक में इसने इन चिन्हों को जोड़ने तथा घटाने के अर्थ में प्रयोग नहीं किया था, वरन् वह ये चिन्ह व्यावहारिक बण्डलों पर डाला करता था। यह दिखाने के लिए अमुक बण्डल किसी निश्चित मात्रा से अधिक है या कम।

समता का चिन्ह—समता का चिन्ह (=) रॉबर्ट रिकार्डे (Robert Ricarde) ने सन् 1557 ई. में प्रचलित किया। रिकार्डे ने यह चिन्ह 'व्हेट्स्टोन ऑफ विट' नामक बीजगणित की पुस्तक में सबसे पहले प्रयोग किया था। उसने उक्त पुस्तक में एक स्थान पर लिखा भी है, "मैं समीकरण के लिए यह चिन्ह इसीलिए लगाता हूँ कि संसार में कोई दो वस्तुएँ इससे अधिक समान नहीं हो सकतीं, जितनी कि ये दोनों रेखाएँ = हैं।"

गुणा के लिए संकेत—गुणा के लिए संकेत (×) सबसे पहले सन् 1631 ई० में अंग्रेज गणितज्ञ विलियम आउट्रैड (William Oughtered) ने प्रयोग किया था। गुणा के लिए यह संकेत (×) इंगलैण्ड में प्रचलित हो गया, परन्तु यूरोप के लिए अन्य देशों में गुणा के लिए डाट (.) प्रयोग होता था।

भाग का चिन्ह—भाग का चिन्ह (÷) स्विट्जरलैण्ड में छपी 1659 ई० में जॉन एच० राइन (John H. Ryhn) द्वारा लिखित बीजगणित में सर्वप्रथम प्रयोग किया गया। यह चिन्ह ग्रेट ब्रिटेन तथा यूनाइटेट स्टेट्स में प्रचलित हो गया, परन्तु अन्य देशों में भाग के लिए (:) चिन्ह प्रयोग होता था।

दशमलव भिन्न का प्रयोग—दशमलव भिन्न का सर्वप्रथम व्यावहारिक प्रयोग हालैण्ड के गणितज्ञ साइमन स्टेविनस (Simon Stevinus) ने अपनी अंकगणित की पुस्तक में किया है जो 1585 ई० में लीडन में छपी थी। यह $\frac{1}{10}$ अर्थात् ·1 के घातों के लिए छोटे वृत्तों का प्रयोग किया करता था; जैसे $73\frac{429}{1000}$ को वह इस प्रकार लिखता था : जैसे 173. · 4 (1) 2 (2) 9 (3)

इस संकेत लिपि का अर्थ यह हुआ—

$$173 \times \left(\frac{1}{10}\right)^0 + 4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 9 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

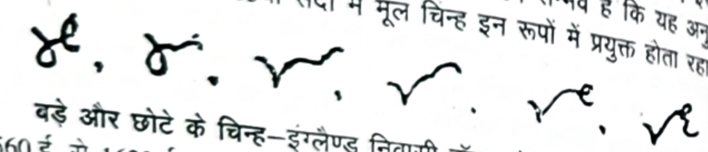
भिन्नात्मक घातांकों का प्रयोग—भिन्नात्मक घातांकों का प्रयोग सबसे पहले फ्रांसीसी गणितज्ञ निकोल ओरेज्म (Nicole Oresme) ने, जिसका समय 1323 ई० से 1382 ई० तक माना जाता है, अपनी पुस्तक ऐल्गोरिज्मस प्रपोर्शनम (Algorismus Proportionum) में किया है। $7^{\frac{1}{2}}$ और $5^{\frac{1}{4}}$ को वह क्रमशः इस प्रकार लिखा करता था—

$$\frac{1}{2}7^{\text{घ}} \quad \text{और} \quad \frac{1}{4}5^{\text{घ}}$$

$6^{2\frac{1}{3}}$ को लिखने के उसके दो ढंग थे—

$$\boxed{\begin{matrix}\text{घ}\\ 2\frac{1}{3}\end{matrix}}\ 6 \quad \text{और} \quad \boxed{\frac{\text{घ}\cdot 2}{1\cdot 3}}\cdot 6$$

मूल चिन्ह का प्रयोग—मूल चिन्ह (√) का प्रयोग सबसे पहले जर्मन गणितज्ञ क्रिस्टल रूडोल्फ ने किया था। इसने 1525 ई. में बीजगणित पर एक पुस्तक लिखी जिसका नाम कॉस (Coss) था। इसी पुस्तक में इसने यह चिन्ह प्रयोग किया था। यह चिन्ह अंग्रेजी r का ही विकृत रूप है और रूडोल्फ ने शायद इसलिए इसका प्रयोग किया हो कि यह शब्द root का पहला अक्षर है। सम्भव है कि यह अनुमान सत्य हो, क्योंकि 14वीं व 15वीं सदी में मूल चिन्ह इन रूपों में प्रयुक्त होता रहा है।



बड़े और छोटे के चिन्ह—इंग्लैण्ड निवासी टॉमस हैरियट जिनका जीवन काल 1560 ई. से 1623 ई. तक रहा है, उन्होंने बड़े और छोटे को प्रदर्शित करने के लिए > और < चिन्ह सर्वप्रथम प्रयुक्त किये थे।

समानुपात और अन्तर चिन्ह का प्रयोग—समानुपात चिन्ह (: :) का और अन्तर चिन्ह (~) का कदाचित पहली बार प्रयोग अंग्रेजी गणितज्ञ विलियम आउट्रैड (William Oughtered) ने किया था। इसने अंकगणित और बीजगणित पर एक छोटी-सी पुस्तक भी लिखी है। इसी पुस्तक में इसने इन चिन्हों का प्रयोग किया है।

घातांकों को ऊपर चढ़ाना—फ्रांसीसी गणितज्ञ रैनी दकार्ते (Rene Descartes) ने ही, जिसका जीवनकाल 1596 ई० से 1650 ई० तक माना जाता है, सबसे पहले घातांकों को ऊपर x^2, x^3 आदि लिखने की प्रणाली चलाई।

प्राचीन भारतीय ग्रन्थों को देखने से मालूम होता है कि भारतवर्ष में भी संकलन आदि परिक्रमों को सूचित करने के लिए संकेतों का प्रयोग होता था। वे संकेत या तो प्रतीकात्मक हैं या चिन्हात्मक।

जोड़ने के लिए संकेत—भारतीय गणितज्ञों की यह परिपाटी रही है कि चिन्ह के स्थान पर तत्सम्बन्धी शब्द का प्रथम अक्षर प्रयोग किया करते थे। इन ग्रन्थों में जोड़ने के लिए 'युत' शब्द का प्रथम अक्षर 'यु' मिलता है। यह अक्षर 'यु' जोड़ी जाने वाली संख्या के अन्त में लिखा जाता था; यथा 4 और 9 जोड़ने होते थे तो इस प्रकार लिखा जाता था—

$$\begin{matrix}4 & 9 & \\ 1 & 1 & \text{यु}\end{matrix}$$

भारतीय प्राचीन ग्रन्थों में पूर्णांक लिखने की यह पद्धति थी कि अंक के नीचे 1 लिख दिया जाता था, किन्तु दोनों के बीच भाग रेखा नहीं लगायी जाती थी।

जैन ग्रन्थ 'त्रिलोयपण्णत्ति' (ईसा की दूसरी शताब्दी का ग्रन्थ) में जोड़ने के लिए 'धण' शब्द लिखा है क्योंकि प्राचीन साहित्य में धन के लिए 'धण' शब्द प्रयोग होता था। (जोड़ने के लिए पं० टोडरमल ने अपने 'अर्थ संदृष्टि' नामक स्थान में (–)

1–

चिन्ह का प्रयोग किया है। यथा $\log_2 \log_2(\text{अ}) + 1$ के लिए ब_2 लिखा है।

घटाने के लिए संकेत—'वक्षालीहस्तलिपि' में, जो कि ईसा की प्रारम्भिक शताब्दियों का ग्रन्थ है, घटाने के लिए (+) चिन्ह का प्रयोग किया है। यह + चिन्ह के लिए $\begin{matrix}20 & 3+\\ 1 & 1\end{matrix}$ लिखते थे।

ईसा की नवीं शताब्दी के लिए आचार्य वीरसेन ने 'धवला' नामक ग्रन्थ में घटाने के लिए इसी प्रकार के संकेत + का प्रयोग किया है।

तिलोयपण्णत्ति', 'त्रिलोकसार' (ईसा की दसवीं शताब्दी का ग्रन्थ) और 'अर्थ संदृष्टि' में घटाने के लिए ° चिन्ह भी मिलता है। जैसे 200 में से 2 घटाने के लिए 0 उस अंक के बाद लिखा जाता था जिसे घटाना होता था। जैसे 200 में से 2 घटाने के लिए इस प्रकार लिखते थे।

$$\begin{matrix}2^{\circ}\\ 200\end{matrix}$$

'त्रिलोकसार' और 'अर्थ' संदृष्टि' में घटाने के लिए 0 संकेत भी मिलता है, यथा—यदि 200 में से 2 घटाने हों तो इस प्रकार लिखते थे—

$$\begin{matrix}200\\ 0\\ 2\end{matrix}$$

गुणा के लिए संकेत—गुणा के लिए 'वक्षालीहस्तलिपि' में 'गु' संकेत का प्रयोग मिलता है; यथा—

$$\left|\begin{matrix}3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 10\ \text{गु}\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{matrix}\right|$$

इसका आशय $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 10$ है।

'त्रिलोयपण्णत्ति', त्रिलोकसार' और 'अर्थ संदृष्टि' में गुणा करने के लिए खड़ी लकीर का प्रयोग किया गया है। यथा—16 को 2 से गुणा करने के लिए 16/2 लिखा है।

भाग के लिए संकेत—भाग के लिए 'वक्षालीहस्तलिपि' में भी संकेत मिलता है।

यथा—

$$\begin{matrix}40\ \text{भा}\\ 1\end{matrix}\ \Bigg\|\quad \begin{matrix}160\\ 1\end{matrix}\ \Bigg|\quad \begin{matrix}13\\ 1\\ 2\end{matrix}\ \Bigg|$$

इसका आशय $\frac{160}{40} \times 13\frac{1}{2}$ है।

भिन्नों को प्रदर्शित करने के लिए 'त्रिलोयपण्णत्ति' और 'त्रिलोकसार' आदि जैन ग्रन्थों में अंश और हर के बीच में रेखा का प्रयोग नहीं मिलता है। $\frac{19}{24}$ को $\begin{matrix}19\\24\end{matrix}$ लिखा है। 'त्रिलोकसार' में 128 को 128/2 लिखा है। 'वक्षालीहस्तलिपि' में $2\frac{1}{2}$ को

2   1

1 और $1\frac{1}{2}$ को 1 लिखा गया है।

2   2

वर्गित-संवर्गित के लिए चिन्ह—वर्गित-संवर्गित शब्द का तात्पर्य किसी संख्या का उसी संख्या के तुल्य घात करने से है। जैसे a का वर्गित-संवर्गित a^a हुआ। जैन ग्रन्थ जैसे 'तिलोयपण्णत्ति' और 'धवला' आदि में इसके लिए विशेष चिन्ह का प्रयोग किया गया है। किसी संख्या को प्रथम बार वर्गित-संवर्गित करने को $\overline{a^1|}$ लिखा जाता है जिसका आशय a^a से है। द्वितीय वर्गित-संवर्गित के लिए $\overline{a^2|}$ लिखा जाता है। इसका आशय a को वर्गित-संवर्गित करके प्राप्त संख्या को पुनः वर्गित-संवर्गित करना है अर्थात् $(a^a)^a$ है। इसी क्रिया को फिर एक बार करने से a का वृतीय वर्गित-संवर्गित प्राप्त होता है। इसको इस प्रकार $a|^3$ लिखते हैं।

वर्गमूल के लिए संकेत—'वक्षालीहस्तलिपि', 'तिलोयपण्णत्ति' और 'अर्थ संदृष्टि' आदि प्राचीन ग्रन्थों में वर्गमूल के संकेत के लिए 'मू.' का प्रयोग किया गया है। इस संकेत को उस संख्या के अंत में लिखा जाता था, जिसका वर्गमूल निकालना होता था; जैसे—

11	—7	मू.	2
1	1		1

का आशय $\sqrt{11-17}=2$ है।

भास्कराचार्य द्वितीय (1150 ई.) ने अपनी बीजगणित में वर्गमूल के लिए 'क' अक्षर का प्रयोग किया है। जैसे—

क 9 क 450 क 75 क 54

का आशय $\sqrt{9}+\sqrt{450}+\sqrt{75}+\sqrt{54}$ है।

समग्रतः कहा जा सकता है कि गणित-जीवन में भी संकेतों ने अपना आदि से अन्त तक समान अधिकार बनाये रखा है, क्योंकि गणित-जीवन की आधारशिला संकेत मात्र ही है। इन्हीं संकेतों के कारण ही विषय में सरलता, सुगमता तथा सुबोधता के गुण स्वभावतः आ जाते हैं।

1. लघुगणक
(LOGARITHMS)

लघुगणक का आविष्कारक स्कॉटलैण्ड निवासी जॉन नेपियर (John Napier) था। 1612 ई. में नेपियर की एक पुस्तक, जिसका नाम 'Mirificilogarithmorum Canonis Descriptio' था, एडिनबर्ग (Edinburgh) में प्रकाशित हुई। इस पुस्तक में

लघुगणकों के आविष्कार का मार्मिक विवेचन दिया हुआ है। उक्त पुस्तक में ही पहली बार लघुगणकों की परिभाषा एवं एक लघुगणक सारणी उपलब्ध होती है। पुस्तक के प्रकाश में आते ही बड़े-बड़े गणितज्ञ जैसे राइट (Wright) और हेनरी ब्रिग्स (Henry Brigs) आदि का ध्यान स्वतः ही आकृष्ट हो गया। राइट ने इस पुस्तक का अंग्रेजी में अनुवाद किया जिसको उसकी मृत्यु के बाद 1616 ई० में उसके लड़के ने प्रकाशित किया।

जिन लघुगणक का नेपियन ने आविष्कार किया था, वे वह नहीं थे जो आजकल दशमलव लघुगणक कहलाते हैं। नेपियर ने प्राकृतिक लघुगणकों का आविष्कार किया था। इस प्रणाली में लघुगणक का आधार एक असम्मेय (Incommensurable), संख्या e मानी जाती है। हेनरी ब्रिग्स ने, जो अंग्रेज गणितज्ञ था, नेपियर के सामने यह प्रस्ताव रखा कि लघुगणकों का आधार संख्या 10 को बना दिया जाय। नेपियर ने इस प्रस्ताव को स्वीकार कर लिया और दोनों ने मिलकर मौलिक लघुगणकों को दशमलव लघुगणकों में बदल दिया। दोनों ने ही मिलकर 1624 ई. में एक पुस्तक 'एरिथ-मैटिकल लॉगरिथमिका' (Arithmetical Logrithmica) प्रकाशित की, जिसमें 1 से 30,000 तक और 80,000 से 1,00,000 तक की संख्याओं के लघुगणक दिये गये हैं।

उपर्युक्त कथन से मालूम पड़ता है कि लघुगणक का आविष्कार योरोप में 17वीं शताब्दी में हुआ, परन्तु भारतीय प्राचीन ग्रन्थों का अवलोकन करने से ज्ञात होता है कि इस विषय की विस्तृत रूप से जानकारी भारत में आज से लगभग 2000 वर्ष पहले भी थी। उस समय लघुगणकों को 'छेदा गणित' के नाम से पुकारते थे। 'तिलोयपण्णत्ति' नामक ईसा की दूसरी शताब्दी के जैन ग्रन्थ में इस विषय पर विस्तृत वर्णन दिया गया है। उस समय लघुगणक के आधार प्रायः 2, 3, 4 आदि संख्याएँ होती थीं। जब लघुगणक का आधार 2 होता है तो उसे 'अर्द्धच्छेद' कहते हैं, जब आधार 3 हो तो 'त्रिकच्छेद' और जब आधार 4 हो तो उसे 'चतुर्थच्छेद' कहते हैं। इसके अतिरिक्त एक अन्य शब्द 'वर्गशलाका' भी इस ग्रन्थ में मिलता है। इस शब्द का आशय अर्द्धच्छेद के अर्द्धच्छेद से है। यथा a की वर्गशलाका = $\text{लघु}_3\ \text{लघु}_4\ a$ है। इन सबका उल्लेख बाद में जैन ग्रन्थों 'धवला' और 'त्रिलोकसार' आदि में भी विस्तृत रूप से मिलता है।

निष्कर्षतः कहा जा सकता है कि लघुगणक, गणितशास्त्र में अपना विशिष्ट महत्त्व रखता है। ऐतिहासिकता से सम्पन्न यह लघुगणक विवेचन जहाँ सैद्धान्तिकता के धरातल पर अत्यन्त उपयोगी है, वहाँ क्रियात्मक धरातल पर भी कम नहीं। क्योंकि यह भारतीय ऐतिहासिकता के परिवेश में पूर्णतः सत्य उतरता है कि यहाँ इसका पहले ही प्रचलन था, न कि यह यूरोपीय गणित की देन है। लघुगणक के बीज भारतीय क्षेत्र में बोये गये। हाँ, ऐसा हो सकता है कि इसको पुष्पित कर विकास की ओर लाने में पाश्चात्य देशों का योगदान रहा हो।

2. गणना-यन्त्र
(COMPUTERS)

हिसाब लगाने के लिए जो यन्त्र प्रयोग किये जाते हैं उन्हें संगणक (Computer) कहते हैं। ऐसी गणना को जिन्हें गणितज्ञ हिसाब लगाकर सप्ताहों में पूरा करते, इलेक्ट्रोनिक संगणक मिनटों में हल कर देते हैं। आधुनिक संगणक मौसम

की भविष्यवाणी कर सकता है, हजारों मजदूरों के वेतन का हिसाब लगा सकता है तथा अन्य दूसरे अंकगणित कार्य बहुत थोड़े समय में सम्पन्न कर सकता है।

प्रथम गणना यन्त्र–सर्वप्रथम गणक-यन्त्र तैयार करने का श्रेय फ्रांस के गणितज्ञ पास्कल को है। घड़ियों के दन्तुर चक्रों (Notched wheels) को सिलिण्डरों के साथ जोड़कर 1642 ई० में पास्कल ने यह गणक-यन्त्र बनाया था। इस यन्त्र में जोड़ने और घटाने की क्रियाओं का समावेश था। अनेक बिक्री-केन्द्रों में मूल्य जोड़ने तथा द्रुत-वाहकों की किलोमीटर दूरी मापने के लिए इस गणक-यन्त्र का प्रयोग होता था। कुछ समय बाद सन् 1667 ई० में जर्मनी के गणितज्ञ लाइबनिट्ज ने इस यन्त्र में गुणा और भाग की क्रियाएँ भी स्थापित कर दीं। तब से यह यन्त्र 'पास्कललाइबनिट्ज गणक' के नाम से प्रसिद्ध हो गया।

वाणिज्योपयोगी गणना यन्त्र–1820 ई. में चार्ल्स जेवियर टॉमस ने प्रथम वाणिज्योपयोगी गणना-यन्त्र बनाया। इसमें निरन्तर सुधार होते रहे और पूर्णतः संशोधित यन्त्र 1866 ई. के लगभग बना।

सन् 1878 ई० में आधुनिक जर्मन गणना-यन्त्र उद्योग की स्थापना आर्थर बुर्खार्ट (Burkhardt) ने की और बुर्खार्ट अंकगणितमापी (Arithmometer) के नाम से इस गणना-यन्त्र का निर्माण आरम्भ हुआ। इस प्रकार के यन्त्र अन्य व्यावसायिक निर्माताओं ने भी बनाये।

कुंजी चलित यन्त्र–कुञ्जी-पट्ट (Key-board) प्रकार के गणना-यन्त्र का आविष्कार और विकास प्रधानतः संयुक्त राज्य अमेरिका में हुआ। यह दो प्रकार का होता है–कुंजी चलित (Key-driving) और कुंजी-नियोजित (Key-setting)। कुंजी-चलित यन्त्र को चलाने के लिए आवश्यक ऊर्जा केवल कुंजियों को दबाने से मिल जाती है। ऐसा पहला यन्त्र 1850 ई० में तैयार हुआ, किन्तु उससे एक बार में अंकों का केवल एक स्तम्भ (Column) जोड़ा जा सकता था। 1887 ई० में फेल्ट ने ऐसा गणनामापी बनाया जिससे कई अंकों वाली संख्याएँ एक साथ जोड़ी जा सकती थीं।

संकलन (Adding) **और सूचीकरण** (Listing) **यन्त्र**–वैसे तो 1872 ई० में संकलनयुक्ति के साथ मुद्रणयुक्ति का संयोजन हो गया था, परन्तु प्रथम प्रायोगिक यन्त्र फेस्ट ने 1886 ई० में तथा बरोज ने 1892 ई० में बनाये। ये यन्त्र तीन प्रकार के होते हैं–(1) एकल संकलन यन्त्र (Single Counter Adding Machine)–इन यन्त्रों में कुछ में घटाने की व्यवस्था रहती है। (2) डूप्ले और बहुगणक संकलन (Duplex and Multiple Counter)–इनमें दो या अधिक गणना-यन्त्रों का समावेश होने के कारण, कई ऐसी क्रियाएँ जो एकलगणक वाले यन्त्र पर अलग-अलग करनी पड़तीं, एक साथ की जा सकती हैं, (3) बिल, लेखा, बहीखाता इत्यादि तैयार करने वाले यन्त्र (Billing, Accounting and Book keeping Machine)–इनसे बीजक रिपोर्ट, व्यापार प्रपत्र आदि तैयार हो जाते हैं, कुछ में संख्यात्मक अभिगणना और अभिलेखन के साथ-साथ टंकण भी होता जाता है। इस प्रकार के यन्त्रों में से कुछ हैं–फ्रिडेन, मैथनैटन, ऐलेन, फेसिट (Facit) आदि।

रोकपंजी (Cash Register)–संकलन यन्त्रों में सबसे लोकप्रिय रोकपंजी है जो प्रायः फुटकर बिक्री करने वाले बड़े भण्डारों में काम आती है। ऐसे यन्त्र 1844 ई० में

अब तक नेशनल कैश रजिस्टर कं०, बरोज और ओमर (Ohmer) ऑपरेशन आदि निर्माताओं ने बनाये हैं। इस यन्त्र के बनाने का मौलिक उद्देश्य फुटकर बिक्री वाले भण्डारों (Retail Stores) में बेईमानी रोकना था, किन्तु अब इनमें इतना विकास हो गया है कि इसमें सभी प्रकार फुटकर सौदों का स्वतः अभिलेखन (Record) हो जाता है, ग्राहकों की रसीदें बन जाती हैं। सन् 1919 ई० में रोकपंजी और संकलन व सूचीकरण के संयोजन वाले यन्त्र का निर्माण हुआ। इस यन्त्र में हर सौदे का नकद दराज खुल जाता है और संकलन तथा सूचीकरण क्रियाएँ भी साथ-साथ होती रहती हैं।

अन्य गुणन और भाजन यन्त्र–सन् 1990 से अनेक परिष्कृत यन्त्र बनने लगे हैं, जिनमें गुणन पुनरावृत्त संकलन और भाजन पुनरावृत्त व्यवकलन से होता है। 1905 ई० में बोस्टन नगर में बने एन्साइन (Ensign) नामक यन्त्र में ऐसी कई विशेषताएँ थीं जो आगे चलकर लगभग सभी यन्त्रों में ग्रहण की गयीं।

छिद्रित पत्रक (Punched Card)–1890 ई. की संयुक्त राज्य अमेरिका की जनगणना से सम्बन्धित विपुल सामग्री का सांख्यिकीय विश्लेषण करने के लिए होलीरिथ (Hollerith) नामक प्रणाली का आविष्कार हुआ। इस प्रणाली का आधार 8" × 3" का पत्रक है, जिस पर छिद्रों द्वारा सूचना का अभिलेखन होता है। इसका उपयोग 1911 ई० की ब्रिटिश जनगणना में होने के कारण, इसमें कई वाणिज्योपयोगी सुधार भी हो गये।

विद्युत-गणक–सन् 1944 में पहला विद्युत गणक तैयार हुआ। इसके बनाने में पाँच वर्ष का समय लगा। इसमें 200 मील तार, 3,000 रिले, 150 मोटर, 23,000 इलेक्ट्रॉनिक ट्यूब और टाइपराइटरों का संयोजन है। इसमें कुल 35,000 कलपुर्जे हैं और इसका वजन केवल 100 टन है। इस यन्त्र का नाम ENIAC है, जो 3,000 अंकों का संग्रह कर सकता है और दो संख्याओं को जोड़ने में उसे केवल $\frac{1}{3}$ सेकण्ड लगते हैं। दूसरा विद्युत-गणक, जिसका नाम Mark I है, दो संख्याओं को जोड़ने में केवल $\frac{1}{5}$ सेकण्ड समय लेता है और जिसकी अंक संग्रह-क्षमता 4,00,000 है। 1942 ई. में Mark II यन्त्र तैयार हुआ। इसकी अंक-संग्रह-क्षमता 80 लाख है और ·00006 सेकण्ड में दो संख्याओं को जोड़ सकता है। 1954 ई. में Mark III तैयार हुआ। वह 5 करोड़ अंकों के संग्रह की क्षमता रखता है और दो संख्याओं के जोड़ने में केवल ·000014 सेकण्ड लगते हैं। इसके बाद UNIAC नामक यन्त्र तैयार हुआ जो 1 सेकण्ड में 1,00,000 गुणन क्रियाएँ कर सकता है।

सन् 1963 में न्यूयार्क में एक ऐसा गणक-यन्त्र लगाया जो एक मिनट में 1,20,000 कानूनी मामलों की जाँच कर सकता है। दूसरा गणक-यन्त्र 1 सेकण्ड में 13 अंकों वाली दो संख्याओं से; जैसे–4578973215423 और 7321457685323 के गुणनफल को मालूम करने के अतिरिक्त इसी प्रकार से 4000 अन्य प्रश्न हल कर देता है। एक नया गणक-यन्त्र 2 मिनट 59 सेकण्ड में उन सभी भिन्न समीकरणों को हल कर देता है जिनके द्वारा 5 अरब वर्ष पूर्व हुए सूर्य के उद्भव पर प्रकाश पड़ता है। इस जटिल प्रश्न को हल करने में लगभग 8 करोड़ गणनाएँ करनी पड़ती हैं।

अभी हाल ही में Tata Institute of Fundamental Research Bombay ने एक आधुनिक गणक-यन्त्र लगाया है। इसको मिनेसोटा (अमरीका) के Control Data

Corporation ने बनाया और इसको भारत सरकार ने लगभग 1 करोड़ रुपये में खरीदा है। यन्त्र का नाम CDC-3600 है। इस यन्त्र की सहायता से 12 अंक वाली संख्याओं की 1 सेकण्ड में 2 लाख गुणन या भाजन क्रियाएँ सम्पन्न की जा सकती हैं। टाटा इन्स्टीट्यूट ने सबसे छोटे आकार का Tifrac नामक गणक-यन्त्र बनाया है।

आज जीवन के विविध क्षेत्रों में विद्युत गणकों का प्रयोग अधिक होने लगा है। इन यन्त्रों से उन जटिल प्रश्नों के हल सेकण्डों में प्राप्त हो जाते हैं जिनके लिए किसी गणितज्ञ को अपना सम्पूर्ण जीवन काल तक लगाना पड़े।

3. नाप-तोल की मीटरी प्रणाली

(METRIC SYSTEM OF WEIGHTS AND MEASUREMENTS)

सारे संसार में वैज्ञानिक लोग नाप-तोल के लिए एक प्रामाणिक प्रणाली प्रयोग में लाते हैं। इस प्रणाली को ही मीटरी प्रणाली कहते हैं। मीटरी शब्द की उत्पत्ति मीटर शब्द से हुई जो कि लम्बाई नापने के काम में आता है।

इस प्रणाली में लम्बाई, द्रव्यमान और समय के मात्रक क्रमशः मीटर, किलोग्राम और सेकण्ड लिए जाते हैं। इन मात्रकों का मान इस प्रकार है :

मीटर—फ्रांस में पेरिस के निकट सेन्टक्लाउड की 'अन्तर्राष्ट्रीय ब्यूरो ऑफ स्टैण्डर्ड्स' में 0°C पर रखे हुए 90% प्लेटिनम तथा 10% इरीडियम (Iridium) मिश्र धातु की बनी हुई एक छड़ पर लगे दो चिह्नों के बीच की दूरी को एक मीटर कहते हैं। वैज्ञानिकों ने इस दूरी को क्रिप्टन-86 के नारंगी-लाल प्रकाश की सहायता से निश्चित किया है। उनके अनुसार एक मीटर दूरी वह दूरी है जिससे क्रिप्टन-86 की नारंगी-लाल वर्ण के प्रकाश की 1650763·73 तरंग लम्बाइयाँ सम्मिलित हैं।

किलोग्राम—फ्रांस के ही ब्यूरो ऑफ मीटरी स्टैण्डर्ड्स वैज्ञानिक बोर्ड द्वारा रखे हुए प्लेटिनम के एक सिलिण्डर के द्रव्यमान को एक किलोग्राम माना जाता है।

सेकण्ड—समय का यह मात्रक माध्य-सौर-दिन (Mean Solar Day) के द्वारा बनाया गया। दोपहर के समय जब सूर्य हमारे सिर के ठीक ऊपर आता है, उस क्षण से अगले दिन के उस क्षण तक का समयान्तराल जब सूर्य फिर सिर के ठीक ऊपर होता है, एक सौर दिन (Solar Day) कहलाता है।

पृथ्वी की सूर्य के चारों ओर परिक्रमण कक्षा ठीक वृत्ताकार नहीं है। इसलिए सौर-दिन का मान वर्ष के विभिन्न भागों में बदलता रहता है। यदि वर्ष भर के सभी सौर-दिनों का माध्य ज्ञात कर लें तो वह माध्य सौर-दिन कहलाता है। इस माध्य-सौर-दिन के $\frac{1}{86400}$ वें भाग को एक सेकण्ड कहा जाता है।

परन्तु स्वयं वर्ष का मान भी थोड़ा बदलता रहता है। अतः जनरल कान्फ्रेंस ऑफ वेट्स एण्ड मेजर्स, पेरिस, 1960 में यह तय किया गया कि 1 सेकण्ड का मान सन् 1900 के वर्ष का $\frac{2}{365 \cdot 2422 \times 24 \times 3600}$ भाग माना जाय।

मीटर प्रणाली, जो कि प्रारम्भ में प्रचलित की गई थी, वह आजकल की मीटर प्रणाली से कई बातों में भिन्न है। प्रारम्भ में प्रचलित मीटरी प्रणाली के अनुसार मीटर

की लम्बाई पृथ्वी के याम्योत्तर के चौथाई का एक करोड़वाँ भाग थी। इस परिभाषा के अनुसार एक मीटर प्रामाणिक लम्बाई की प्लेटीनम की एक छड बनाई गई। यह प्रामाणिक मीटर की लम्बाई लगभग 19वीं शताब्दी तक मान्य रही।

ग्राम, जो कि द्रव्यमान की इकाई कही जाती है, 4°C वाले 1 घन सेमी शुद्ध पानी की तौल के बराबर मानी जाती थी। प्लेटीनम का एक बेलन, जो कि आर्कीव (Archives) का किलोग्राम माना जाता था, बनाया गया और उसे 1000 प्रामाणिक ग्राम घोषित किया गया।

10 मई 1875 ई० में फ्रांस में, पेरिस के निकट सेवरेस नामक स्थान पर नाप-तोल सम्बन्धी अन्तर्राष्ट्रीय विभाग की स्थापना हुई। इस विभाग का काम नाप-तोल सम्बन्धी इकाइयों में सुधार करना था। इस विभाग के द्वारा 1889 ई० में एक सामान्य सभा में तय करके मीटर और किलोग्राम की नवीन परिभाषा अपनाई गयी।

इस प्रणाली के विकास में फ्रांसीसी वैज्ञानिकों ने महान् योग दिया है। 1799 ई० में फ्रांसीसियों ने इस प्रणाली को कानूनी तौर पर नाप-तोल की प्रणाली माना और सन् 1837 ई० में इस प्रणाली का प्रचलन अनिवार्य कर दिया। इसके बाद बहुत-से अन्य देशों ने भी प्रणाली को अपनाना शुरू कर दिया। द्वितीय महायुद्ध के बाद चीन, मिस्र (Egypt) तथा भारतवर्ष ने भी इस प्रणाली को अपनाया। मीटरी प्रणाली प्रायः नाप-तोल की सभी प्रणालियों में प्राचीन, सुगम एवं वैज्ञानिक है। परन्तु ग्रेट ब्रिटेन, संयुक्त राज्य अमेरिका, कनाडा और ब्रिटिश साम्राज्य (British Commonwealth) के अन्य देशों ने इस प्रणाली को न अपनाकर ब्रिटिश प्रणाली का ही प्रयोग जारी रखा।

सन् 1866 ई० में विज्ञान कांग्रेस ने संयुक्त राज्य अमेरिका में उन लोगों को, जो मीटरी प्रणाली प्रयोग करना चाहें, प्रयोग करने की कानूनी तौर पर अनुमति दे दी। सन् 1893 ई० में वाशिंगटन के नाप-तोल संघ ने भी इस प्रणाली को अपना लिया। आजकल यह प्रणाली जमीन की नाप-तोल करने में, भाव की दर निर्धारित करने में (Tariff operations), मुद्रा बनाने में तथा विदेशी डाक के तोलने में प्रयोग होती है। विद्युत की नाप-तोल में यही प्रणाली काम में लायी जाती है। चश्मे के लेन्स आदि की पैमाइश भी इसी प्रणाली से की जाती है। रेडियो स्टेशन भी ध्वनि की तरंग-दैर्घ्य (Wave-length) को इसी प्रणाली के अनुसार प्रसारण करते हैं। संयुक्त राज्य अमेरिका में इस प्रणाली की विशेषताओं से प्रभावित होकर सर्वसाधारण के प्रयोग में लाने के लिए प्रयत्न किये गये। भारतवर्ष में भी 1956 ई० में सार्वजनिक कार्यों में इस प्रणाली का प्रयोग अनिवार्य कर दिया।

[स]

कुछ चुने हुए प्रश्न

(Some Selected Questions)

1. Discuss the relative importance of oral and written work in the teaching of Mathematics. Give suitable examples from the field of Algebra.